MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

57. BAND 4. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 12. MÄRZ 1953)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953

Math. Z.

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96 —.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W.C.2.

---

57. Band **Inhalt** 4. (Schluß-)Heft

Seite

Pickert, G., Direkte Zerlegungen von algebraischen Strukturen mit Relationen . . 356

Rajagopal, C. T., A Generalization of Tauber's Theorem and some Tauberian Constants 405

Davies, E. T., On the Invariant Theory of Contact Transformations 415

Forster, H., Über eine Randwertaufgabe der Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = r^2 k \frac{\partial f}{\partial t} \quad . \quad . \quad .

PICKERT, G.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 395—404 (1953)

Direkte Zerlegungen von algebraischen Strukturen mit Relationen.

Von
GÜNTER PICKERT.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich den *Remakschen Satz* für eine Gruppe mit einer Familie von Paarungen bewiesen, wobei der Paarungsbegriff den des Operators verallgemeinert. Dieses Ergebnis läßt sich bei geringfügiger Verschärfung der Voraussetzungen wesentlich einfacher durch Zurückführen auf die von O. ORE herrührende, im folgenden als *Satz von Ore* bezeichnete verbandstheoretische Verallgemeinerung des Remakschen Satzes gewinnen; auf diese Tatsache machte mich Herr M. F. SMILEY freundlicherweise aufmerksam. Unter Ausnutzung des hierbei verwendeten Verfahrens gelingt nun die Ausdehnung des Remakschen Satzes auf eine verhältnismäßig umfassende Klasse algebraischer Strukturen mit Relationen. Dies wird im folgenden dargestellt. Abschnitt **1** stellt die benötigten Grundbegriffe und Tatsachen über direkte Zerlegungen algebraischer Strukturen zusammen. In Abschnitt **2** wird in Verallgemeinerung des Paarungsbegriffs erklärt, wann eine Relation (mit beliebig vielen Leerstellen) hinsichtlich einer algebraischen Struktur zulässig heißen soll; für eine solche Relation P werden dann die Begriffe P-Endomorphismus und P-direkte Zerlegung definiert. Abschnitt **3** behandelt die für das Folgende grundlegende Darstellung der P-direkten Zerlegungen mittels der Elemente eines gewissen Verbandes. Anwendung des Oreschen Satzes in der in Abschnitt **4** angegebenen Gestalt auf diesen Verband liefert dann in Abschnitt **5** den Remakschen Satz über die bis auf P-Automorphismen eindeutige Bestimmtheit der maximalen P-direkten Zerlegungen unter der Voraussetzung, daß die algebraische Struktur eine binäre Verknüpfung mit einem eine Unterstruktur bildenden neutralen Element besitzt und daß zwei in Abschnitt **3** definierte Verbände von Kongruenzrelationen untereinander vertauschbare Elemente haben und von endlicher Länge sind.

1. Unter einer *algebraischen Struktur* G sei im folgenden verstanden eine nichtleere Menge (welche der Einfachheit halber ebenfalls mit G bezeichnet werde) zusammen mit einer nichtleeren Menge[2]) Φ von in G erklärten Funktionen

[1]) PICKERT, G.: Remaksche Zerlegungen für Gruppen mit Paarungen. Math. Z. **53**, 456—462 (1950).

[2]) In manchen Untersuchungen ist es erforderlich, statt einer Menge eine *Familie* zu nehmen; siehe z.B. H. F. J. LÖWIG, On the properties of freely generated algebras. J. angew. Math. **190**, 65—74 (1952). Die Möglichkeit, mit einer *Menge* auszukommen, beruht darauf, daß hier sämtliche vorkommenden Homomorphismen Endomorphismen sind — von einer unwesentlichen Ausnahme abgesehen.

endlich vieler Argumente, den *Verknüpfungen* von G. Eine solche Verknüpfung $F \in \Phi$ ist also eine Abbildung von G^{n_F}[3]) in G, wobei die natürliche Zahl n_F, die Anzahl der Argumente der Funktion F, durchaus von F abhängen kann. Über Φ werde nun die *Tarskische Voraussetzung*[4]) gemacht, nämlich, daß darin eine Verknüpfung F mit $n_F = 2$ und einem neutralen Element vorkommt; d.h. also, wenn $F(x, y) = x + y$ geschrieben und das — bekanntlich eindeutig bestimmte — neutrale Element als das *Nullelement* 0 bezeichnet wird:

$$x + 0 = x = 0 + x \quad \textit{für alle} \quad x \in G. \tag{1}$$

Ferner wird über dieses Nullelement

$$F(0, \ldots, 0) = 0 \quad \textit{für alle} \quad F \in \Phi \tag{2}$$

vorausgesetzt, d.h. also: $\{0\}$ ist Unterstruktur von G. Allgemein bezeichnet man eine nichtleere Menge $M \subseteqq G$ als *Unterstruktur* von G, wenn aus $F \in \Phi$ und $x_\nu \in M$ $(\nu = 1, \ldots, n_F)$ stets $F(x_1, \ldots, x_{n_F}) \in M$ folgt. Eine Unterstruktur kann also wieder als eine algebraische Struktur mit der Verknüpfungsmenge Φ aufgefaßt werden, wobei dann allerdings verschiedene Verknüpfungen von G dieselbe Verknüpfung von M liefern können. Eine Abbildung ϱ von G in sich heißt *Endomorphismus* von G, wenn $\varrho\, 0 = 0$ und

$$\varrho F(x_1, \ldots, x_{n_F}) = F(\varrho\, x_1, \ldots, \varrho\, x_{n_F}) \quad \textit{für alle} \quad F \in \Phi \quad \textit{und} \quad x_\nu \in G \tag{3}$$

gilt. Ein Endomorphismus ϱ bildet G auf eine Unterstruktur ab, die mit ϱG bezeichnet werde. Für den durch $\varrho G = \{0\}$ definierten Endomorphismus ϱ wird wieder das Zeichen 0 verwendet. Ein n-tupel $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ von Endomorphismen ϱ_ν heißt *direkte Zerlegung*[5]) von G, wenn $\varrho_\nu^2 = \varrho_\nu$, $\varrho_\nu \varrho_\mu = 0$ für alle $\nu, \mu = 1, \ldots, n$ mit $\nu \neq \mu$ gilt und zu $x_1, \ldots, x_n \in G$ mit $\varrho_\nu x_\nu = x_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ genau ein x mit $\varrho_\nu x = x_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ vorhanden ist. Die ϱ_ν heißen die *Zerlegungsendomorphismen* der direkten Zerlegung und die $\varrho_\nu x$ die *Komponenten* von x. Zufolge (1) gilt mit der für $n \geqq 2$ durch

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = (\ldots((x_1 + x_2) + x_3) + \cdots) + x_n \quad \text{für alle} \quad x_1, \ldots, x_n \in G$$

bestimmten Funktion F_n die Beziehung[6])

$$x = F_n(\varrho_1 x, \ldots, \varrho_n x) \quad \textit{für alle} \quad x \in G \tag{4}$$

bei jeder direkten Zerlegung $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ von G. Eine in G erklärte Äquivalenzrelation γ heißt *Kongruenzrelation* von G, wenn für $F \in \Phi$ und $x_\nu, y_\nu \in G$ aus $x_\nu \gamma y_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n_F)$, d.h. dem Bestehen der Relation γ zwischen x_ν und y_ν, stets $F(x_1, \ldots, x_{n_F})\, \gamma\, F(y_1, \ldots, y_{n_F})$ folgt. Die Kongruenzrelationen von G

[3]) Allgemein bezeichnet A^B die Menge der Abbildungen von B in A, wofür im Falle $B = \{1, \ldots, n\}$ kurz A^n geschrieben wird.

[4]) Vgl. JÓNSSON u. TARSKI, Direct decompositions of finite algebraic systems, Notre Dame 1947, sowie A. W. GOLDIE, On direct decompositions I, Proc. Cambridge Phil. Soc. **48**, 1—22 (1952) (im folgenden mit G bezeichnet).

[5]) Vgl. G, S. 3.

[6]) G, S. 6.

bilden nun bekanntlich mit $\leqq$ als Teilordnungsbeziehung einen Verband[7]), wobei $\gamma \leqq \gamma'$ bedeutet, daß aus $x \gamma y$ stets $x \gamma' y$ folgt. In diesem Verband ist die Identität ι das kleinste und die durch $x \varepsilon y$ (für alle $x, y \in G$) erklärte Relation ε das größte Element. Da die Hinzufügung der oben erklärten Funktion F_n zu Φ offensichtlich den Umfang der Begriffe Unterstruktur, Endomorphismus und Kongruenzrelation von G nicht verändert, kann o.B.d.A. $F_n \in \Phi$ für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ angenommen werden.

In einem Verband wird ein Element β als die *direkte Vereinigung*[8]) $\gamma_1 \dot\cup \gamma_2 \dot\cup \ldots \dot\cup \gamma_n$ von Elementen γ_ν bezeichnet, wenn $\beta = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$ gilt und $\bigcup_{\nu \in N} \gamma_\nu \cap \bigcup_{\nu \in N'} \gamma_\nu$ (mit $N' = \{1, \ldots, n\} - N$) für jede nichtleere Menge $N \subset \{1, \ldots, n\}$ kleinstes Element des Verbandes ist. Handelt es sich wie hier insbesondere um den Verband der Kongruenzrelationen einer algebraischen Struktur, so wird $\beta = \gamma_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \gamma_n$ im Falle der *Vertauschbarkeit* der γ_ν, d.h. $\gamma_\nu \gamma_\mu = \gamma_\mu \gamma_\nu (\nu, \mu = 1, \ldots, n)$[9]) als das *direkte Produkt* $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ bezeichnet. Folgt aus $\beta = \gamma \dot\cup \gamma'$, daß γ oder γ' das kleinste Element des Verbandes ist, so heißt β *direkt-unzerlegbar*. Die direkten Zerlegungen $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ von G sind nun eineindeutig den Darstellungen $\varepsilon = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ zugeordnet[10]) mittels der Festsetzung

(5) $\qquad x \gamma_\nu y$ *genau dann, wenn* $\varrho_\mu x = \varrho_\mu y$ *für alle* $\mu \neq \nu$

und der Bestimmung der ϱ_ν aus den γ_μ mittels

(6) $\qquad 0 \gamma_\nu (\varrho_\nu x) \left(\bigcup_{\mu \neq \nu} \gamma_\mu\right) x$ *für alle* $x \in G$;

dabei ist also $\varrho_\nu G$ der *Kern* von γ_ν, d.h. die Menge der y mit $y \gamma_\nu 0$. Diejenigen Kongruenzrelationen, welche in solchen Darstellungen von ε vorkommen, seien als die *Zerlegungsrelationen* von G und die γ_ν in (5), (6) insbesondere als die Zerlegungsrelationen der direkten Zerlegung $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ bezeichnet. Zur Bestimmung aller Zerlegungsrelationen genügt es natürlich, die Zerlegungen mit $n = 2$ zu betrachten, da ja $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n = \gamma_1 \times (\gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n)$ gilt. Nach (5) gibt es daher zu einer Zerlegungsrelation γ stets einen Endomorphismus ϱ so, daß $x \gamma y$ und $\varrho x = \varrho y$ dasselbe bedeuten. Hat die Verknüpfung $+$ nun die Eigenschaft, daß aus $x + z = y + z$ stets $x = y$ folgt, so folgt daher für jede Zerlegungsrelation γ aus $(x + z) \gamma (y + z)$ stets $x \gamma y$. Für ein Loop (= Quasigruppe mit neutralem Element) sind daher alle Zerlegungsrelationen normal, so daß der von den Zerlegungsrelationen erzeugte Unterverband nur aus untereinander vertauschbaren Kongruenzrelationen besteht[11]).

[7]) Vgl. G. Birkhoff, Lattice Theory, New York 1948 (im folgenden mit B bezeichnet), S. 23/24.

[8]) Bei B, S. 94 nur in modularen Verbänden eingeführt und mit $\times$ bezeichnet; G, S. 6 verwendet die Benennung „direktes Produkt" und die Bezeichnung $\otimes$, während er den im folgenden unter diesem Namen eingeführten Begriff „algebraisches direktes Produkt" nennt und mit $\times$ bezeichnet. $\cup$ und $\cap$ werden hier und im folgenden als Zeichen für die Bildung der oberen bzw. unteren Grenze in dem betreffenden Verband gebraucht.

[9]) $x (\gamma_\nu \gamma_\mu) y$ bedeutet wie üblich, daß es ein z mit $x \gamma_\nu z \gamma_\mu y$ gibt.

[10]) G, S. 8.

[11]) Zum Begriff „normal" und der hier gezogenen Folgerung vgl. B, S. 85/86.

2. Es sei jetzt P eine *Relation* in G mit der nichtleeren Indexmenge[12]) I ihrer Leerstellen, d.h. $P \subseteq G^I$. Die Relation P wird als *zulässig* bezeichnet, wenn für jede Verknüpfung $F \in \Phi$ und $f_1, \ldots, f_{n_F} \in P$ die durch

$$F(f_1, \ldots, f_{n_F})(i) = F\big(f_1(i), \ldots, f_{n_F}(i)\big) \quad \textit{für alle} \quad i \in I \tag{7}$$

definierte Abbildung $F(f_1, \ldots, f_{n_F})$ in P liegt und die durch $0(i) = 0$ (für alle $i \in I$) definierte Abbildung 0 in P enthalten ist. Offenbar sind $\{0\}$ und G^I solche zulässigen Relationen. Im folgenden sei P stets als zulässig vorausgesetzt. Das besagt also: *Φ läßt sich gemäß (7) auch als Menge von Verknüpfungen in der dadurch zur algebraischen Struktur gemachten Menge P auffassen und die Gln.* (1), (2) *übertragen sich von G auf P.* Natürlich können verschiedene Verknüpfungen von G dieselbe Verknüpfung von P liefern.

Ein Endomorphismus ϱ von G wird als *P-Endomorphismus* bezeichnet, wenn mit f stets auch die durch

$$(\varrho f)(i) = \varrho f(i) \quad \textit{für alle} \quad i \in I \tag{8}$$

definierte Abbildung ϱf in P liegt[13]). ϱ läßt sich dann gemäß (8) als Abbildung von P in sich auffassen, und zwar ist ϱ sogar Endomorphismus der algebraischen Struktur P; denn aus (3), (7) und (8) folgt $\big(\varrho F(f_1, \ldots, f_{n_F})\big)(i) = \varrho F(f_1, \ldots, f_{n_F})(i) = \varrho F\big(f_1(i), \ldots, f_{n_F}(i)\big) = F\big(\varrho f_1(i), \ldots, \varrho f_{n_F}(i)\big) = F\big((\varrho f_1)(i), \ldots, (\varrho f_{n_F})(i)\big) = F(\varrho f_1, \ldots, \varrho f_{n_F})(i)$ für alle $i \in I$, also $\varrho F(f_1, \ldots, f_{n_F}) = F(\varrho f_1, \ldots, \varrho f_{n_F})$, d.h. die (3) entsprechende Beziehung, und ferner ergibt sich $(\varrho\, 0)(i) = \varrho\, 0(i) = \varrho\, 0 = 0$, also $\varrho\, 0 = 0$ auch für das Nullelement von P. Es ist sofort zu erkennen, daß sowohl im Falle $P = \{0\}$ wie auch im Falle $P = G^I$ jeder Endomorphismus ein P-Endomorphismus ist. Ein umkehrbarer P-Endomorphismus ϱ, dessen Umkehrung ϱ^{-1} wieder ein P-Endomorphismus ist[14]), heißt *P-Automorphismus.*

Eine direkte Zerlegung von G, deren Zerlegungsendomorphismen P-Endomorphismen sind, werde *P-direkt* genannt. Wird entsprechend (7) durch

$$F\big((x_1', \ldots, x_n'), \ldots, (x_1^{(n_F)}, \ldots, x_n^{(n_F)})\big) = \big(F(x_1', \ldots, x_1^{(n_F)}), \ldots, F(x_n', \ldots, x_n^{(n_F)})\big) \tag{9}$$

die Menge G^n der n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ zu einer algebraischen Struktur mit der Verknüpfungsmenge Φ gemacht, so wird für jede direkte Zerlegung $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ durch

$$\varrho\, x = (\varrho_1 x, \ldots, \varrho_n x) \quad \textit{für alle} \quad x \in G \tag{10}$$

eine umkehrbare Abbildung ϱ von G in G^n definiert, welche wegen (9) und der Endomorphismuseigenschaft der ϱ_ν die Gl. (3) erfüllt:

$$\begin{aligned} \varrho F(x_1, \ldots, x_{n_F}) &= \big(F(\varrho_1 x_1, \ldots, \varrho_1 x_{n_F}), \ldots, F(\varrho_n x_1, \ldots, \varrho_n x_{n_F})\big) \\ &= F\big((\varrho_1 x_1, \ldots, \varrho_n x_1), \ldots, (\varrho_1 x_{n_F}, \ldots, \varrho_n x_{n_F})\big) \\ &= F(\varrho\, x_1, \ldots, \varrho\, x_{n_F}). \end{aligned}$$

[12]) Damit wird ausgedrückt, daß I im folgenden durch irgendeine eineindeutig auf I abgebildete Menge ersetzt werden darf.

[13]) Vgl. die Homomorphismusdefinition in G. PICKERT, Bemerkungen zum Homomorphiebegriff, Math. Z. **53**, 375—386 (1950).

[14]) Diese Bedingung ist nicht etwa überflüssig! Siehe PICKERT, a. a. O.[13]).

ϱ ist also ein Isomorphismus[15]) von G auf die Unterstruktur ϱG von G^n. Wird nun P^n in der üblichen Weise, nämlich mittels der Festsetzung $(f_1, \ldots, f_n)(i) = (f_1(i), \ldots, f_n(i))$, als Teilmenge von $(G^n)^I$ aufgefaßt und ϱ mittels (8) auf P ausgedehnt, so gilt:

Eine direkte Zerlegung $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ist genau dann P-direkt, wenn $\varrho P \subseteq P^n$ ist.

Dieses Ergebnis ist übrigens unabhängig von der Voraussetzung (1).

3. Zur weiteren Untersuchung der P-direkten Zerlegungen werden die folgenden drei Verbände betrachtet: Der von den Zerlegungsrelationen von G erzeugte Unterverband $\mathfrak{G}$ des Verbandes der Kongruenzrelationen von G; der von den Zerlegungsrelationen von P erzeugte Unterverband $\mathfrak{P}$ des Verbandes der Kongruenzrelationen von P; der Unterverband $\mathfrak{V}$ des Kardinalproduktes[16]) $\mathfrak{G}\mathfrak{P}$, welcher aus den Paaren (γ, π) mit $\gamma \in \mathfrak{G}$, $\pi \in \mathfrak{P}$ und

$$f(i)\,\gamma\,g(i) \quad \text{für alle} \quad i \in I, \quad \text{falls} \quad f\,\pi\,g \tag{11}$$

besteht. Es ist noch nachzuweisen, daß $\mathfrak{V}$ wirklich ein Unterverband ist. Es sei $(\gamma, \pi) \in \mathfrak{V}$, $(\gamma', \pi') \in \mathfrak{V}$. Bekanntlich[17]) folgt aus $f(\pi \cup \pi')\,g$, daß mit gewissen $h_\nu \in P$ Beziehungen $f\,\pi_1\,h_1\,\pi_2\,h_2\,\pi_3 \ldots h_{m-1}\,\pi_m\,g$ bestehen, wobei $\pi_\nu = \pi$ oder $= \pi'$ ist. Gemäß (11) folgt daraus nun $f(i)\,\gamma_1\,h_1(i)\,\gamma_2 \ldots h_{m-1}(i)\,\gamma_m\,g(i)$ mit $\gamma_\nu = \gamma$ oder $= \gamma'$ und daraus wiederum $f(i)\ (\gamma \cup \gamma')\,g(i)$. Somit liegt $(\gamma, \pi) \cup (\gamma', \pi') = (\gamma \cup \gamma', \pi \cup \pi')$ in $\mathfrak{V}$. Aus $f(\pi \cap \pi')\,g$ folgt $f\,\pi\,g$ und $f\,\pi'\,g$, daraus nach (11) $f(i)\,\gamma\,g(i)$ und $f(i)\,\gamma'\,g(i)$, also $f(i)\ (\gamma \cap \gamma')\,g(i)$. Somit liegt auch $(\gamma, \pi) \cap (\gamma', \pi') = (\gamma \cap \gamma', \pi \cap \pi')$ in $\mathfrak{V}$.

Offensichtlich enthält $\mathfrak{G}$ die Kongruenzrelationen ι und ε. Die entsprechenden Kongruenzrelationen von P seien einfachheitshalber ebenso bezeichnet. Es gilt nun der für das Folgende grundlegende Satz[18]): *Die untereinander vertauschbaren $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathfrak{G}$ sind genau dann die Zerlegungsrelationen einer P-direkten Zerlegung von G, wenn es untereinander vertauschbare $\pi_1, \ldots, \pi_n \in \mathfrak{P}$ mit*

$$(\varepsilon, \varepsilon) = (\gamma_1, \pi_1) \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} (\gamma_n, \pi_n) \tag{12}$$

in $\mathfrak{V}$ gibt. Die π_ν sind dabei durch die γ_ν eindeutig bestimmt.

Beweis. Ist $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ eine P-direkte Zerlegung von G, so auch — wenn die ϱ_ν gemäß (8) als Abbildungen von P aufgefaßt werden — eine direkte Zerlegung von P; denn sind $f_\nu \in P$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ mit $\varrho_\nu f_\nu = f_\nu$, also $\varrho_\nu f_\nu(i) = f_\nu(i)$ für alle $i \in I$, gegeben, so gibt es nach Voraussetzung über die ϱ_ν genau eine Abbildung $f \in G^I$ mit $\varrho_\nu f(i) = f_\nu(i)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ für alle $i \in I$ und nach (4) ist dann $f(i) = F_n(f_1(i), \ldots, f_n(i))$, also gemäß (7) $f = F_n(f_1, \ldots, f_n) \in P$. Diese direkte Zerlegung von P liefert nun eine Darstellung $\varepsilon = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ in $\mathfrak{P}$. Dabei bedeutet $f\,\pi_\nu\,g$ entsprechend (5) dasselbe wie $\varrho_\mu f = \varrho_\mu g$ für alle $\mu \neq \nu$,

[15]) Vgl. G, S. 4, Th. 3.1.

[16]) Darunter versteht man den Verband aller Paare (γ, π) mit $\gamma \in \mathfrak{G}$, $\pi \in \mathfrak{P}$, in welchem $(\gamma, \pi) \subseteq (\gamma', \pi')$ dasselbe bedeutet wie $\gamma \subseteq \gamma'$, $\pi \subseteq \pi'$; vgl. B, S. 25.

[17]) B, S. 23, Th. 4.

[18]) Für den Fall einer Gruppe G verdanke ich diesen Satz einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. F. Smiley.

also nach (8) dasselbe wie $\varrho_\mu f(i) = \varrho_\mu g(i)$ für alle $\mu \neq \nu$ und alle $i \in I$. Das besagt nach (5) aber gerade $f(i)\,\gamma_\nu\,g(i)$ für alle $i \in I$. Somit ist (11) bestätigt, also $(\gamma_\nu, \pi_\nu) \in \mathfrak{V}$. Da $\mathfrak{V}$ Unterverband von $\mathfrak{G}\mathfrak{P}$ ist, folgt schließlich aus $\varepsilon = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ und $\varepsilon = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ die behauptete Beziehung (12).

Ist umgekehrt (12) erfüllt, so folgt daraus wegen der Vertauschbarkeit der γ_ν sowohl wie der π_ν untereinander $\varepsilon = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ in $\mathfrak{G}$ und $\varepsilon = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ in $\mathfrak{P}$. Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß die nach (6) durch die γ_ν bestimmten ϱ_ν P-Endomorphismen sind. Zu diesem Zweck werden die Zerlegungsendomorphismen der durch $\varepsilon = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ bestimmten direkten Zerlegung von $\mathfrak{P}$ benutzt. Für das Bild f_ν eines $f \in P$ bei dem ν-ten dieser Zerlegungsendomorphismen gilt dann entsprechend (6) die Beziehung

$$0\,\pi_\nu f_\nu \left(\bigcup_{\mu \neq \nu} \pi_\mu\right) f.$$

Es gibt also $h_1, \ldots, h_{m-1} \in P$ so, daß

$$0\,\pi_\nu f_\nu \pi_{\mu_1} h_1 \pi_{\mu_2} h_2 \ldots \pi_{\mu_{m-1}} h_{m-1} \pi_{\mu_m} f$$

mit gewissen $\mu_k \neq \nu$ gilt. Wegen der den (γ_ν, π_ν) zukommenden Eigenschaft (11) folgt daraus

$$0\,\gamma_\nu f_\nu(i)\,\gamma_{\mu_1} h_1(i)\,\gamma_{\mu_2} h_2(i) \ldots \gamma_{\mu_{m-1}} h_{m-1}(i)\,\gamma_{\mu_m} f(i),$$

also

$$0\,\gamma_\nu f_\nu(i) \left(\bigcup_{\mu \neq \nu} \gamma_\mu\right) f(i),$$

d.h. aber nach (6) $f_\nu(i) = \varrho_\nu f(i)$ für alle $i \in I$. Daher ist $\varrho_\nu f = f_\nu \in P$.

Aus dieser Herleitung folgt sofort auch die eindeutige Bestimmtheit der π_ν; denn die zu $\varepsilon = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ gehörige direkte Zerlegung von P, welche entsprechend (5) umgekehrt die π_ν festlegt, wird ja wegen $\varrho_\nu f = f_\nu$ bereits durch die ϱ_ν, also auch durch die γ_ν bestimmt. Der erste Teil des Beweises liefert übrigens noch die explizite Kennzeichnung der π_ν mittels der γ_ν: $f\,\pi_\nu\,g$ bedeutet dasselbe wie $f(i)\,\gamma_\nu\,g(i)$ für alle $i \in I$.

Die P-direkte Zerlegung $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ werde als *maximal* bezeichnet, wenn in einer P-direkten Zerlegung (ϱ', ϱ'') einer Unterstruktur $\varrho_\nu G$ stets $\varrho' = 0$ oder $\varrho'' = 0$ ist. Es gilt der Satz:

Sind alle Elemente von $\mathfrak{G}$ untereinander vertauschbar und ebenso alle Elemente von $\mathfrak{P}$, so drückt sich die Maximalität einer P-direkten Zerlegung von G darin aus, daß in (12) *die (γ_ν, π_ν) direkt-unzerlegbar sind.*

Beweis. $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ sei nicht maximal, also (ϱ', ϱ'') mit $\varrho' \neq 0$, $\varrho'' \neq 0$ eine P-direkte Zerlegung etwa von $\varrho_1 G$. Man rechnet leicht nach, daß $(\varrho'\varrho_1, \varrho''\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$ wieder eine P-direkte Zerlegung von G ist. Da aus $\varrho'\varrho_1 x = \varrho'\varrho_1 y$, $\varrho''\varrho_1 x = \varrho''\varrho_1 y$ sofort $\varrho_1 x = \varrho_1 y$ folgt, sind die $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ auch Zerlegungsrelationen dieser neuen Zerlegung. Werden die den $\varrho'\varrho_1$, $\varrho''\varrho_1$ zugeordneten Zerlegungsrelationen mit γ', γ'' bezeichnet, so folgen aus $x\,\gamma'\,y$ sowohl wie aus $x\,\gamma''\,y$ die Gleichungen $\varrho_\mu x = \varrho_\mu y$ $(\mu = 2, \ldots, n)$ und damit die Beziehung $x\,\gamma_1\,y$. Also ist $\gamma' \leqq \gamma_1$, $\gamma'' \leqq \gamma_1$. Umgekehrt folgt aus $x\,\gamma_1\,y$, wenn z durch $\varrho'\varrho_1 z = \varrho'\varrho_1 y$, $\varrho''\varrho_1 z = \varrho''\varrho_1 x$, $\varrho_\mu z = \varrho_\mu x = \varrho_\mu y$ $(\mu = 2, \ldots, n)$

bestimmt wird, die Beziehung $x\,\gamma'\,z\,\gamma''\,y$, d.h. es gilt $\gamma_1 \subseteq \gamma'\,\gamma''$. Damit ist $\gamma_1 = \gamma' \cup \gamma''$ bewiesen, und wegen $\gamma' \cap \gamma'' = \iota$ gilt sogar $\gamma_1 = \gamma' \dot\cup \gamma''$. Aus der (12) entsprechenden Gleichung

$$(13) \qquad (\varepsilon, \varepsilon) = (\gamma', \pi') \dot\cup (\gamma'', \pi'') \dot\cup (\gamma_2, \pi_2) \dot\cup \ldots \dot\cup (\gamma_n, \pi_n)$$

wird nun

$$(\varepsilon, \varepsilon) = (\gamma_1, \pi' \dot\cup \pi'') \dot\cup (\gamma_2, \pi_2) \dot\cup \ldots \dot\cup (\gamma_n, \pi_n).$$

Vergleich mit (12) beweist in Anbetracht der eindeutigen Bestimmtheit der π die Gleichung $\pi_1 = \pi' \dot\cup \pi''$, so daß also

$$(14) \qquad (\gamma_1, \pi_1) = (\gamma', \pi') \dot\cup (\gamma'', \pi'')$$

gilt. Wegen $\varrho' \neq 0$ gibt es ein $x \in G$ mit $\varrho'\varrho_1 x \neq 0$. Wird y durch $\varrho'\varrho_1 y = 0$, $\varrho''\varrho_1 y = \varrho''\varrho_1 x$, $\varrho_\mu y = \varrho_\mu x$ $(\mu = 2, \ldots, n)$ bestimmt, so ist $x\,\gamma'\,y$, aber $x \neq y$, also $\gamma' \neq \iota$. In gleicher Weise folgt $\gamma'' \neq \iota$ aus $\varrho'' \neq 0$. Daher ist (γ_1, π_1) nicht direkt-unzerlegbar.

Wird umgekehrt (γ_1, π_1) als nicht direkt-unzerlegbar vorausgesetzt, also (14) mit $(\gamma', \pi') \neq (\iota, \iota)$, $(\gamma'', \pi'') \neq (\iota, \iota)$ angenommen, so ist $\gamma' \neq \iota$ und $\gamma'' \neq \iota$, weil aus $\gamma' = \iota$ in Anbetracht von (11) ja $\pi' = \iota$ und aus $\gamma'' = \iota$ ja $\pi'' = \iota$ folgen würde. Weiter folgt aus (12) und (14) die Gl. (13); denn wegen der über die Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ gemachten Vertauschbarkeitsvoraussetzung sind $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ sowie damit auch $\mathfrak{V}$ modular[19]), und in einem modularen Verband folgt $a_1 \dot\cup \ldots \dot\cup a_n = a_1 \cup \ldots \cup a_n$ bereits daraus, daß die $(a_1 \cup \ldots \cup a_k) \cap a_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ gleich dem kleinsten Element des Verbandes sind[20]). In der zu (13) gehörenden P-direkten Zerlegung von G seien ϱ_1', ϱ_1'' die den γ', γ'' entsprechenden Zerlegungsendomorphismen. $\varrho_1' G$ ist als Kern von γ' wegen $\gamma' \subseteq \gamma_1$ im Kern $\varrho_1 G$ von γ_1 enthalten, und ebenso gilt natürlich auch $\varrho_1'' G \subseteq \varrho_1 G$. Daher rufen ϱ_1', ϱ_1'' P-Endomorphismen ϱ', ϱ'' von $\varrho_1 G$ hervor, und man sieht leicht ein, daß (ϱ', ϱ'') eine P-direkte Zerlegung von $\varrho_1 G$ ist. Wegen $\gamma' \neq \iota$ gibt es nun $x, y \in G$ mit $x\,\gamma'\,y$ und $x \neq y$, also mit $\varrho_1' x \neq \varrho_1' y$, so daß $\varrho_1' G \supset \{0\}$ sein muß. Daraus folgt nun $\varrho' \neq 0$ wegen $\varrho'\varrho_1 G = \varrho_1'\varrho_1 G \supseteq \varrho_1'^2 G = \varrho_1' G$. In derselben Weise ergibt sich $\varrho'' \neq 0$ aus $\gamma'' \neq \iota$, so daß (ϱ', ϱ'') nicht maximal ist.

4. Um nun den Remakschen Satz für die P-direkten Zerlegungen beweisen zu können, benötigt man den *Satz von Ore* in der folgenden Form[21]):

In einem modularen Verband endlicher Länge[22]) *besitzt das größte Element e eine Darstellung* $e = a_1 \dot\cup \ldots \dot\cup a_m$ *mit direkt-unzerlegbaren* a_μ. *Ist* $e = b_1 \dot\cup \ldots \dot\cup b_n$ *eine weitere Darstellung mit direkt-unzerlegbaren* b_ν *und sind die* a_μ, b_ν *sämtlich von dem kleinsten Element* 0 *des Verbandes verschieden, so ist* $m = n$, *und nach*

[19]) *B*, S. 86/87, Beweis von Th. 3.

[20]) *B*, S. 73, Th. 7 Cor.; man kann statt dieser Tatsache auch den in modularen Verbänden geltenden Hilfssatz heranziehen: Aus $a \cap b = 0 = (a \cup b) \cap c$ folgt $(a \cup c) \cap b = 0$.

Beweis: $((a \cup c) \cap b) \cup a = (a \cup c) \cap (b \cup a) = a \cup (c \cap (b \cup a)) = a$;

$$(a \cup c) \cap b = ((a \cup c) \cap b) \cup (a \cap b) = (((a \cup c) \cap b) \cup a) \cap b = a \cap b = 0.$$

[21]) Diese Form verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. F. Smiley.

[22]) Definition dieses Begriffes siehe z.B. *B*, S. 11.

passender Umnumerierung der b_ν gibt es Elemente c_ν mit

$$e = a_\nu \dot\cup c_\nu = b_\nu \dot\cup c_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, m).$$

Der erste Teil des Satzes wird wie üblich durch vollständige Induktion nach der Länge des Verbandes bewiesen, was hier nicht ausgeführt zu werden braucht. Der Beweis des zweiten Teiles wird durch vollständige Induktion nach m geführt, wobei die Behauptung — von $m = n$ abgesehen — noch durch $c_\nu = b_1 \dot\cup \ldots \dot\cup b_{\nu-1} \dot\cup a_{\nu+1} \dot\cup \ldots \dot\cup a_m$ zu

$$(15) \qquad e = b_1 \dot\cup \ldots \dot\cup b_\nu \dot\cup a_{\nu+1} \dot\cup \ldots \dot\cup a_m \qquad (\nu = 1, \ldots, m-1)$$

verschärft wird. Da die Richtigkeit für $m = 1$ offensichtlich ist, braucht nur noch der Induktionsschritt von $m-1$ nach m durchgeführt zu werden. Die folgende Herleitung dafür stützt sich auf den auch beim Beweis der üblichen Fassung des Oreschen Satzes verwendeten Hilfssatz[23]), welcher besagt, daß nach passender Umnumerierung der b_ν

$$(16) \qquad e = b_1 \dot\cup a_2 \dot\cup \ldots \dot\cup a_m$$

gilt. Es sei nun die Numerierung so gewählt, daß (16) erfüllt ist, also (15) für $\nu = 1$. Die $b_2, \ldots, b_n$ können dann natürlich unter sich noch beliebig umnumeriert werden. Wegen der Modularität und den sich aus $e = b_1 \dot\cup \ldots \dot\cup b_m$ sowie (16) für $a = a_2 \cup \ldots \cup a_m$, $b = b_2 \cup \ldots \cup b_m$ ergebenden Gleichungen $b_1 \cup b = e = b_1 \cup a$, $b_1 \cap b = 0 = b_1 \cap a$ wird nun bekanntlich[24]) der Unterverband der Elemente $\leqq a$ sowohl wie der Unterverband der Elemente $\leqq b$ durch $x \to x \cup b_1$ isomorph auf den Unterverband e/b_1 der Elemente $\geqq b_1$ abgebildet, dessen kleinstes Element also b_1 ist. Aus $a_2 \dot\cup \ldots \dot\cup a_m = a$ und $b_2 \dot\cup \ldots \dot\cup b_n = b$ entstehen durch diese Isomorphismen die Beziehungen

$$(a_2 \cup b_1) \dot\cup \ldots \dot\cup (a_m \cup b_1) = e = (b_2 \cup b_1) \dot\cup \ldots \dot\cup (b_n \cup b_1) \quad \text{in} \quad e/b_1,$$

worin natürlich die $a_\mu \cup b_1$ $(\mu = 2, \ldots, m)$ sowohl wie die $b_\nu \cup b_1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ sämtlich direkt-unzerlegbar sind. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher $m - 1 = n - 1$ und bei passender Umnumerierung der $b_2, \ldots, b_n$ unter sich

$$(17) \quad e = (b_2 \cup b_1) \dot\cup \ldots \dot\cup (b_\nu \cup b_1) \dot\cup (a_{\nu+1} \cup b_1) \dot\cup \ldots \dot\cup (a_m \cup b_1) \quad (\nu = 2, \ldots, m-1)$$

in e/b_1. Mit

$$d_k = \begin{cases} b_k & \text{für} \quad k = 1, \ldots, \nu \\ a_k & \text{für} \quad k = \nu + 1, \ldots, m \end{cases}$$

gilt daher

$$(d_2 \cup \ldots \cup d_k \cup b_1) \cap (d_{k+1} \cup b_1) = b_1 \qquad (k = 2, \ldots, m-1).$$

Wegen der Modularität folgt daraus

$$\left((d_1 \cup \ldots \cup d_k) \cap d_{k+1}\right) \cup b_1 = b_1,$$

also

$$(d_1 \cup \ldots \cup d_k) \cap d_{k+1} \leqq b_1$$

[23]) Siehe etwa *B*, S. 94/95. Dieser Hilfssatz enthält den schwierigen Teil des Beweises.
[24]) Siehe etwa *B*, S. 73, Th. 6.

und damit wegen der aus (16) und $e = b_1 \cup \ldots \cup b_n$ folgenden Beziehung $d_{k+1} \cap b_1 = 0$ $(k = 1, \ldots, m-1)$:

$$(d_1 \cup \ldots \cup d_k) \cap d_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m-1).$$

Wegen der Modularität des Verbandes besagt dieses Ergebnis zusammen mit der aus (17) folgenden Gleichung $e = d_1 \cup \ldots \cup d_m$ gerade die Behauptung (15) für die noch fehlenden Fälle $\nu = 2, \ldots, m-1$ [20]).

5. Mit den so zusammengestellten Hilfsmitteln läßt sich nun der *Remaksche Satz für die P-direkten Zerlegungen* beweisen:

Ist G eine die Tarskische Voraussetzung nebst (2) erfüllende algebraische Struktur mit der zulässigen Relation P, haben die von den Zerlegungsrelationen von G bzw. P erzeugten Verbände $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ endliche Länge und sind die Elemente von $\mathfrak{G}$ sowie die von $\mathfrak{P}$ untereinander vertauschbar, so besitzt G maximale P-direkte Zerlegungen, und aus einer solchen $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ erhält man mittels P-Automorphismen σ von G alle andern in der Gestalt $(\sigma\varrho_1\sigma^{-1}, \ldots, \sigma\varrho_n\sigma^{-1})$.

Aus der Längenendlichkeit von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ folgt natürlich auch die von $\mathfrak{V}$. Die Vertauschbarkeitsvoraussetzungen ziehen nun — wie schon in **3** bemerkt — die Modularität von $\mathfrak{V}$ nach sich. Auf $\mathfrak{V}$ kann also der Satz von Ore aus **4** angewandt werden. Mittels der in **3** gewonnenen Beschreibung der P-direkten Zerlegungen ergibt sich daraus sofort die Existenz maximaler P-direkter Zerlegungen, und für zwei solche $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ und $(\varrho'_1, \ldots, \varrho'_{n'})$ mit den Zerlegungsrelationen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ bzw. $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'}$ folgt $n' = n$ sowie nach passender Umnumerierung

$$(18) \qquad (\varepsilon, \varepsilon) = (\gamma_\nu, \pi_\nu) \cup (\bar{\gamma}_\nu, \bar{\pi}_\nu) = (\gamma'_\nu, \pi'_\nu) \cup (\bar{\gamma}_\nu, \bar{\pi}_\nu)$$

mit gewissen $(\bar{\gamma}_\nu, \bar{\pi}_\nu) \in \mathfrak{V}$, wobei die π_ν, π'_ν die den γ_ν, γ'_ν gemäß (12) entsprechenden Elemente aus $\mathfrak{P}$ sind. (18) liefert nun zwei P-direkte Zerlegungen von G, die eine mit den Zerlegungsrelationen $\gamma_\nu, \bar{\gamma}_\nu$, die andere mit $\gamma'_\nu, \bar{\gamma}_\nu$. Bei der ersten sei σ_ν der zu γ_ν gehörige Zerlegungsendomorphismus und bei der zweiten σ'_ν der zu γ'_ν gehörige. Entsprechend (5) bedeutet dann $\sigma_\nu x = \sigma_\nu y$ dasselbe wie $x \bar{\gamma}_\nu y$ und damit dasselbe wie $\sigma'_\nu x = \sigma'_\nu y$. Unter Berücksichtigung von $\sigma_\nu^2 = \sigma_\nu$ und $\sigma_\nu'^2 = \sigma'_\nu$ gewinnt man daraus

$$(19) \qquad \sigma_\nu \sigma'_\nu = \sigma_\nu, \qquad \sigma'_\nu \sigma_\nu = \sigma'_\nu.$$

Als Kern von γ_ν bzw. von γ'_ν ist ferner $\sigma_\nu G = \varrho_\nu G$, $\sigma'_\nu G = \varrho'_\nu G$ und daher

$$(20_{1-5}) \qquad \sigma_\nu \varrho_\nu = \varrho_\nu, \quad \varrho_\nu \sigma_\nu = \sigma_\nu, \quad \sigma'_\nu \varrho'_\nu = \varrho'_\nu, \quad \varrho'_\nu \sigma'_\nu = \sigma'_\nu, \quad \varrho_\mu \sigma_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

Nun wird wegen (20_4) durch

$$(21) \qquad \varrho'_\nu \sigma x = \sigma'_\nu \varrho_\nu x \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \text{ für alle } x \in G,$$

oder, was nach der auf die ϱ'_ν angewandten Gl. (4) dasselbe ist,

$$(22) \qquad \sigma x = F_n(\sigma'_1 \varrho_1 x, \ldots, \sigma'_n \varrho_n x) \quad \text{für alle } x \in G$$

eine Abbildung σ von G in sich definiert. σ ist ein Endomorphismus von G, denn nach (21) und der Endomorphismuseigenschaft der $\varrho_\nu, \varrho'_\nu, \sigma'_\nu$ folgt für ein

$F \in \Phi$, wobei nur zur Vereinfachung der Schreibweise $n_F = 1$ angenommen ist:

$$\varrho_\nu' F(\sigma x) = F(\varrho_\nu' \sigma x) = F(\sigma_\nu' \varrho_\nu x) = \sigma_\nu' \varrho_\nu F(x),$$

also gemäß (21) $F(\sigma x) = \sigma F(x)$. Da für $f \in P$ aus (22), (7), (8) und der Tatsache, daß die σ_ν', ϱ_ν P-Endomorphismen sind, $\sigma f = F_n(\sigma_1' \varrho_1 f, \ldots, \sigma_n' \varrho_n f) \in P$ folgt, ist σ sogar ein P-Endomorphismus. Für irgendein $y \in G$ folgt aus $\sigma x = y$ nach (21), (19) und (20_1) $\sigma_\nu \varrho_\nu' y = \varrho_\nu x$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Wegen (20_2) lassen sich umgekehrt diese Gleichungen bei gegebenem y durch genau ein x erfüllen und nach (21), (19), (20_3) folgt aus ihnen wieder $\varrho_\nu' y = \sigma_\nu' \varrho_\nu x$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, also $\sigma x = y$. Somit ist σ eine umkehrbare Abbildung von G auf sich mit

$$\varrho_\nu \sigma^{-1} x = \sigma_\nu \varrho_\nu' x \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \text{ } \textit{für alle } x \in G \tag{23}$$

oder, was nach (4) dasselbe ist,

$$\sigma^{-1} x = F_n(\sigma_1 \varrho_1' x, \ldots, \sigma_n \varrho_n' x) \quad \textit{für alle } x \in G. \tag{24}$$

Genau wie vorher aus (21) und (22) für σ folgt jetzt aus (23) und (24), daß σ^{-1} ein P-Endomorphismus und damit σ ein P-Automorphismus ist. Aus (21), (23) folgt $\varrho_\mu' \sigma \varrho_\nu \sigma^{-1} x = \sigma_\mu' \varrho_\mu \sigma_\nu \varrho_\nu' x$ und daraus weiter mittels (20_5) $\varrho_\mu' \sigma \varrho_\nu \sigma^{-1} x = 0$ für $\mu \neq \nu$ sowie mittels (20_2), (19) und (20_3) $\varrho_\nu' \sigma \varrho_\nu \sigma^{-1} x = \sigma_\nu' \sigma_\nu \varrho_\nu' x = \varrho_\nu' x$. Das besagt aber $\sigma \varrho_\nu \sigma^{-1} x = \varrho_\nu' x$ für alle $x \in G$, also $\sigma \varrho_\nu \sigma^{-1} = \varrho_\nu'$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, w. z. b. w.

Sind statt der einen Relation in G mehrere zulässige Relationen $P_1, \ldots, P_n$ mit den zueinander fremden Indexmengen $I_1, \ldots, I_n$ gegeben, so kann man diese offenbar wieder zu einer einzigen zulässigen Relation P mit der Indexmenge $\bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu$ zusammenfassen. Bei Ausdehnung dieses Verfahrens auf unendlich viele Relationen $\neq \{0\}$ besitzt dann allerdings — wie man leicht sieht — $\mathfrak{P}$ keine endliche Länge mehr, so daß die hier bewiesene Gestalt des Remakschen Satzes nicht anwendbar ist. In dieser Beziehung erhält man also hier für Gruppen mit Paarungen ein schwächeres Ergebnis als das mittels des Fittingschen Beweisverfahrens erreichte[1]).

Die Vertauschungsvoraussetzungen über die Elemente von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{P}$ sind nach einer am Schluß von 1 gemachten Bemerkung jedenfalls dann erfüllt, wenn G und P Loops bezüglich der Verknüpfung $+$ sind. Im Falle $P = \{0\}$ wird der Begriff der P-direkten Zerlegung zu dem der gewöhnlichen direkten Zerlegung. Da der Verband der zulässigen Normalteiler einer Gruppe mit Operatoren bekanntlich isomorph ist zum Verband der Kongruenzrelationen dieser algebraischen Struktur, so liefert mit $P = \{0\}$ der hier bewiesene Satz insbesondere den Remakschen Satz für Gruppen mit Operatoren in der üblichen Form - abgesehen natürlich von der darin vorkommenden Aussage, daß man sich auf die *normalen* Automorphismen σ beschränken kann.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 28. August 1952.)

RAJAGOPAL, C. T.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 405—414 (1953)

A Generalization of Tauber's Theorem and some Tauberian Constants.

By

C. T. RAJAGOPAL.

1. Introduction. R. P. AGNEW and H. HADWIGER ([1] and References in [1]) have obtained interesting generalizations of TAUBER's theorem for series $\sum a_n$ which are Abel-summable and such that $a_n = o(n^{-1})$, replacing the condition $a_n = o(n^{-1})$ by $a_n = O(n^{-1})$. These generalizations have been extended to include other processes of summability in a comprehensive paper written by DELANGE [2] and an independent note written by myself [5]. Theorem A of the present note is of the same type as the theorems in DELANGE's paper and my note just referred to. But it includes, besides a generalization of the AGNEW-HADWIGER theorems, an analogous result for BOREL summability, in much the same way as a theorem of KARAMATA ([3], § 13, Théorème B, and § 18; or [4], Satz VI) includes the HARDY-LITTLEWOOD converse theorem on BOREL summability as well as a similar theorem, on certain other processes of summability, due substantially to WIENER ([8], Theorem XV; [3], § 14, exemple I). Theorem A may be of some interest in that it suggests a unified approach to various "Tauberian constants", among them a new constant, $\sqrt{2/\pi}$, for BOREL summability, which is the best possible in the specific sense of Theorem 1b.

2. The main theorem. Theorem A. *Suppose that $A(u)$ is a function of bounded variation in every finite interval of $u \geqq 0$. Suppose that*

(a) *in the Ψ-transform of $A(u)$:*

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \psi(x, u)\, A(u)\, du,$$

$\psi(x, u) \geqq 0$ for all large x and every $u \geqq 0$;

(b) *$A(u)$ is a strictly increasing, unbounded, differentiable function of u such that*

(i) $$\psi\{x, V(y\,u)\} \frac{\partial V(y\,u)}{\partial u} \to N(u) \quad \text{for} \quad \text{every } u > 0,$$

as $x \to \infty$, $V(u)$ being the function which is the inverse of $A(u)$ and $y = f(x)$ being a continuous, strictly increasing, unbounded function;

(ii) $$\begin{cases} N_{x,y}(u) \text{ defined by} \\ N_{x,y}(u) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \leq u < A(0)/y, \\ \psi\{x, V(y\,u)\} \dfrac{\partial V(y\,u)}{\partial u} & \text{for} \quad u \geqq A(0)/y, \end{cases} \end{cases}$$

is such that $N_{x,y}(u) \leq F(u)$ *for all large* x *and every* $u \geq 0$, *where* $F(u)$, $F(u)\,|\log u|$ *are integrable in* $(0, \infty)$. *Suppose finally that*

(c) $\overline{\lim_{u\to\infty}}\ \overline{\text{bound}}_{u\leq u'\leq U}\ |A(u') - A(u)| \leq K \log \lambda$ *for* $A(u) = \lambda A(u)$, $\lambda > 1$.

Then

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\ |\Psi(x) - A\{V(f(x))\}\int_0^\infty \psi(x,u)\,du| \leq K\int_0^\infty N(u)\,|\log u|\,du.$$

Proof. From the definition of $\Psi(x)$,

$$\Psi(x) - A\{V(f(x))\}\int_0^\infty \psi(x,u)\,du$$

$$= \int_0^\infty \psi(x,u)\,A(u)\,du - A\{V(y)\}\int_0^\infty \psi(x,u)\,du \qquad [y = f(x)]$$

$$= \int_{A(0)/y}^\infty \psi\{x, V(yu)\}\,A\{V(yu)\}\,\frac{\partial V(yu)}{\partial u}\,du - \int_{A(0)/y}^\infty A\{V(y)\}\,\psi\{x, V(yu)\}\,\frac{\partial V(yu)}{\partial u}\,du$$

$$= \int_0^\infty [A\{V(yu)\} - A\{V(y)\}]\,N_{x,y}(u)\,du.$$

Hence, for all large x,

$$(2.1)\quad \Psi(x) - A\{V(f(x))\}\int_0^\infty \psi(x,u)\,du \leq \int_0^\infty N_{x,y}(u)\,|A\{V(yu)\} - A\{V(y)\}|\,du.$$

Now, hypothesis (c) gives

$$(2.2)\qquad \overline{\lim_{y\to\infty}}\ |A\{V(yu)\} - A\{V(y)\}| \leq K\,|\log u|.$$

When $x \to \infty$ and therefore $y = f(x) \to \infty$, we obtain from (2.1), (2.2) and hypotheses b, on appealing to a special form of the LEBESGUE theorem for taking limits under integral signs ([2], Lemme 2), the conclusion sought:

$$(2.3)\qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\ |\Psi(x) - A\{V(f(x))\}\int_0^\infty \psi(x,u)\,du| \leq \int_0^\infty N(u)\,K\,|\log u|\,du.$$

3. Application to Borel summability. $\psi(x,u)$ defined by

$$\psi(x,u) = \frac{e^{-x}x^u}{\Gamma(u+1)}$$

obviously satisfies the initial condition in hypothesis (a) of Theorem A; and furthermore it has been shown ([4], p. 9) to satisfy hypotheses (b) of Theorem A with

$$A(u) = e^{\sqrt{u}}, \qquad y \equiv f(x) = e^{\sqrt{x}},$$

$N_{x,y}(u)$, $N(u)$, $F(u)$ being defined as follows:

$$N_{x,y}(u) = \begin{cases} 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq u\,y < 1, \\ \dfrac{2\log y\,u\,e^{-\log^2 y}\,(\log y)^{2\log^2 y\,u}}{u\,\Gamma(1+\log^2 y\,u)} \quad \text{for} \quad u\,y \geq 1, \end{cases}$$

$$N(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{-2\log^2 u}}{u}, \qquad F(u) = \frac{e^{-\log^2 u}}{u}.$$

Hence the following theorem is a deduction from Theorem A.

Theorem 1a. *If $A(u)$ is a function of bounded variation in every finite interval of $u \geqq 0$ and such that*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \overline{\operatorname{bound}_{u\leq u'\leq U}} |A(u') - A(u)| \leq K \log \lambda \qquad \text{for} \qquad e^{\sqrt{U}} = \lambda e^{\sqrt{u}}, \qquad \lambda > 1, \tag{3.1}$$

then $A(u)$ is related to its transform

$$B_1(x) = e^{-x} \int_0^\infty \frac{x^u}{\Gamma(u+1)} A(u)\, du \tag{3.2}$$

by the inequality

$$\left\{ \begin{aligned} &\overline{\lim_{x\to\infty}} \left| B_1(x) - A(x)\, e^{-x} \int_0^\infty \frac{x^u}{\Gamma(u+1)} du \right| \\ &\qquad \leq K \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-2\log^2 u}}{u} |\log u|\, du = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \right. \tag{3.3}$$

Theorem 1a can be made to yield the following theorem on Borel summability whose "best-possible" character is established by an example kindly supplied to me by Dr. T. Vijayaraghavan.

Theorem 1b. *If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is such that*

$$\overline{\lim} \sqrt{n}\, |a_n| = L < \infty, \tag{3.4}$$

then the Borel *transform of $\sum a_n$, namely,*

$$B(x) = \int_0^\infty \varphi(x, u)\, dA(u), \tag{3.5}$$

where

$$\varphi(x, n) = e^{-x} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x e^{-u} u^{n-1} du,$$

$$A(u) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad \text{for} \quad n \leq u < n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.6}$$

satisfies the inequality

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} |B(x) - A(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, L, \tag{3.7}$$

which is the best possible under the conditions assumed in the sense that $\sqrt{2/\pi}$ cannot be replaced by a smaller positive number.

Proof. The condition (3.4) implies that the step function $A(u)$ in (3.6) is such that, if

$$n \leq u < n+1, \qquad n' \leq u' < n'+1,$$

then, for every $\varepsilon > 0$ and all large $n < n'$,

$$|A(u') - A(u)| \leq 2(L+\varepsilon)\left(\sqrt{n'} - \sqrt{n}\right) < 2(L+\varepsilon)\left(\sqrt{u'} - \sqrt{u}\right) + (L+\varepsilon)\left(\frac{1}{\sqrt{n'}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

so that

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \overline{\operatorname{bound}_{\sqrt{u} \leq \sqrt{u'} \leq \sqrt{u} + \log\lambda}} |A(u') - A(u)| \leq 2L \log \lambda.$$

Thus (3.4) implies (3.1) with $A(u)$ defined as in (3.6) and $K=2L$. Hence we deduce from (3.3), taking $A(u)$ as in (3.6), (3.4), and then $B_1(x)$ as in (3.2),

$$(3.8)\qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\,|B_1(x)-A_1(x)|\leqq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,L,\quad \text{where}\quad A_1(x)=A(x)\,e^{-x}\int_0^{\infty}\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\,du.$$

Now it is plain that $B(x)$ in (3.5) may be connected with $A(x)$ in (3.6) by the inequality

$$(3.9)\qquad |B(x)-A(x)|\leqq|B_1(x)-A_1(x)|+|B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x)|.$$

And so the conclusion of Theorem 1b, as stated in (3.7), will follow from (3.8) and (3.9) provided that

$$(3.10)\qquad \lim_{x\to\infty}|B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x)|=0.$$

To prove (3.10) we first observe that, if $m\leqq x<m+1$, then

$$A(x)=A(m)=A(m)\,e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!},\qquad A_1(x)=A(m)\,e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\,du,$$

$$B(x)=e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}\,A(\nu),\qquad B_1(x)=e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\,A(\nu)\,du;$$

and consequently

$$(3.11)\qquad \begin{cases} B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x) \\ \qquad =e^{-x}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\{A(m)-A(\nu)\}\left\{\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\,du-\frac{x^\nu}{\nu!}\right\}. \end{cases}$$

Now $x^u/\Gamma(u+1)$, considered as a function of u, increases steadily to its maximum at $u=u_0$, $x-1<u_0<x$, and then decreases steadily. Since

$$(3.12)\qquad m-1\leqq x-1<u_0<x<m+1,$$

we have, from (3.11),

$$\begin{aligned}|B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x)|&\leqq e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}|A(m)-A(\nu)|\cdot\left|\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\,du-\frac{x^\nu}{\nu!}\right|<\\ &<e^{-x}\sum_{\nu=0}^{m-2}|A(m)-A(\nu)|\left(\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}-\frac{x^\nu}{\nu!}\right)+\\ &\quad+e^{-x}|A(m)-A(m-1)|\left(\frac{x^{u_0}}{\Gamma(u_0+1)}-\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\right)+\\ &\quad+e^{-x}\sum_{\nu=m+1}^{\infty}|A(m)-A(\nu)|\left(\frac{x^\nu}{\nu!}-\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\right).\end{aligned}$$

Hence we get, using (3.4),

$$
(3.13)\quad \left\{\begin{aligned}
&|B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x)|< \\
&\qquad < 2C\,e^{-x}\sum_{\nu=0}^{m-2}\left(\sqrt{m}-\sqrt{\nu}\right)\left(\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}-\frac{x^{\nu}}{\nu!}\right)+ \\
&\qquad + 2C\,e^{-x}\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)\left(\frac{x^{u_0}}{\Gamma(u_0+1)}-\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\right)+ \\
&\qquad + 2C\,e^{-x}\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\left(\sqrt{\nu}-\sqrt{m}\right)\left(\frac{x^{\nu}}{\nu!}-\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\right)
\end{aligned}\right.
$$

where C is a constant. (3.13) gives, when we rearrange the terms in its right-hand member,

$$
(3.14)\quad \left\{\begin{aligned}
&|B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x)|<-2C\,e^{-x}\sqrt{m}+ \\
&\qquad + 2C\,e^{-x}\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)\left(\frac{x^{u_0}}{\Gamma(u_0+1)}-\frac{x^{m}}{m!}\right)+ \\
&\qquad + 2C\,e^{-x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu-1}\right)\frac{x^{\nu}}{\nu!}\,.
\end{aligned}\right.
$$

The first term on the right side of (3.14) tends to 0 as $x\to\infty$ since $m\leqq x<m+1$; the last term also tends to 0 since it can be regarded as the Borel transform of the null sequence $2C\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$; while each of the two terms composing the middle term tends to 0 as $x\to\infty$ since, by (3.12) and Stirling's approximation,

$$
e^{-x}\frac{\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)x^{u_0}}{\Gamma(u_0+1)}<\frac{1}{2\sqrt{m-1}}\,\frac{e^{-u_0}(u_0+1)^{u_0}}{\Gamma(u_0+1)}\sim\frac{e}{2\sqrt{m-1}\,\sqrt{2\pi u_0}}
$$

and there are exactly similar relations with m in place of u_0. Thus the right side of (3.14) tends to 0 as $x\to\infty$, and (3.10) follows from (3.14). This completes the proof of (3.7) as we have already observed.

To show that the relation (3.7) is the best possible in the sense that it can become an equality, we consider the *example*:

$$
(3.15)\quad a_n=\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{1}{2^{m-1}} & \text{if}\quad 4^{m-1}<n\leqq 4^{m-1}+m\,2^{m-1} \\
-\dfrac{1}{2^{m}} & \text{if}\quad 4^{m}-m\,2^{m}<n\leqq 4^{m} \\
0 & \text{otherwise,}
\end{array}\right\}\ m=1,2,\ldots
$$

in which (3.4) *holds with* $L=1$ *and, as* $k\to\infty$ *through integral values,*

$$
(3.16)\qquad B(4^k)-A(4^k)=B(4^k)\to\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.
$$

To prove (3.16) we write

$$
\begin{aligned}
B(4^k)&=\sum_{\nu=0}^{4^k-k\,2^k}e^{-4^k}\frac{(4^k)^{\nu}}{\nu!}A(\nu)+\sum_{\nu=4^k-k\,2^k+1}^{4^k+(k+1)\,2^k}\cdots+\sum_{\nu=4^k+(k+1)\,2^k+1}^{\infty}\cdots \\
&=S_1+S_2+S_3\quad\text{say,}
\end{aligned}
$$

and show that, as $k \to \infty$,

$$S_1 \to 0, \qquad S_2 \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad S_3 \to 0. \tag{3.17}$$

In S_1, $0 \leq A(\nu) \leq k$ as a result of (3.15). $(4^k)^\nu/\nu!$ monotonically increases with ν, the increase continuing up to $\nu = 4^k$. Hence we get

$$\begin{aligned} 0 < S_1 &< e^{-4^k} \frac{(4^k)^{4^k - k2^k}}{(4^k - k2^k)!} k(4^k - k2^k + 1) \\ &\sim e^{-4^k} \frac{(4^k)^{4^k - k2^k} k(4^k - k2^k + 1)}{\sqrt{2\pi}\, e^{-(4^k - k2^k)} (4^k - k2^k)^{4^k - k2^k + \frac{1}{2}}} \qquad (k \to \infty) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{k\, 4^{k/2}}{e^{k^2/2}} \to 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

using Stirling's approximation in the step preceding (3.18).

Again

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{r \geq k} \left[\sum_{\nu = 4^r + (r+1)2^{r+1}}^{4^{r+1} - (r+1)2^{r+1}} e^{-4^k} \frac{(4^k)^\nu}{\nu!} A(\nu) + \sum_{\nu = 4^{r+1} - (r+1)2^{r+1} + 1}^{4^{r+1} + (r+2)2^{r+1}} \cdots \right] \\ &= \sum_{r \geq k} [s_1(r) + s_2(r)] \quad \text{say.} \end{aligned}$$

We know that

$$\frac{x^m}{m!} < \frac{x^n}{n!} \exp\left\{ - \frac{(m-n)^2}{2m} \right\} \quad \text{for} \quad m > n \geq x \quad ([7], \text{p. } 317).$$

Hence, in $s_1(r)$,

$$\begin{aligned} \frac{(4^k)^\nu}{\nu!} &< \frac{(4^k)^{4^k}}{(4^k)!} \exp\left\{ - \frac{(\nu - 4^k)^2}{2\nu} \right\} \\ &< \frac{(4^k)^{4^k}}{(4^k)!} \exp\left\{ - \frac{(4^r + \overline{r+1}\, 2^r + 1 - 4^k)^2}{2(4^{r+1} - \overline{r+1}\, 2^{r+1})} \right\} \\ &< \frac{(4^k)^{4^k}}{(4^k)!} \exp\left\{ - \frac{(r+1)^2 4^r}{4 \cdot 4^{r+1}} \right\} \end{aligned}$$

for all sufficiently large k. Since, in $s_1(r)$, $A(\nu) = r + 1$ by (3.15) and the number of terms is $O(4^r)$, we have

$$0 < s_1(r) < e^{-4^k} \frac{(4^k)^{4^k}}{(4^k)!} \exp\left\{ - \left(\frac{r+1}{4} \right)^2 \right\} \cdot (r+1) O(4^r) \qquad (r \geq k \to \infty).$$

Now using Stirling's approximation for $(4^k)!$, we get

$$\sum_{r \geq k} s_1(r) = O(4^{-k/2}) \sum_{r \geq k} \exp\left\{ - \left(\frac{r+1}{4} \right)^2 \right\} \cdot (r+1) O(4^r) \to 0.$$

Similarly $\sum_{r \geq k} s_2(r) \to 0$ and so, from (3.19),

$$S_3 \to 0. \tag{3.20}$$

Finally

$$S_2 = \sum_{\nu=4^k-k\,2^k+1}^{4^k} e^{-4^k}\frac{(4^k)^\nu}{\nu!}A(\nu) + \sum_{\nu=4^k+1}^{4^k+(k+1)2^k}\cdots$$

$$= s_3 + s_4 \text{ say}$$

where

$$s_4 = e^{-4^k}\sum_{r=1}^{(k+1)2^k}\frac{(4^k)^{4^k+r}}{(4^k+r)!}\frac{r}{2^k}$$

$$= \frac{e^{-N}N^{N+\frac{1}{2}}}{N!}\sum_{r=1}^{(\log N/\log 4+1)\sqrt{N}}\frac{r\,N^{-1}}{(1+N^{-1})(1+2N^{-1})\dots(1+r\,N^{-1})},$$

$$N = 4^k.$$

Writing $N^{-1} = \delta^2$, letting $N \to \infty$ and using Stirling's approximation, we find that

$$s_4 \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{r=1}^{\Delta}\frac{r\,\delta^2}{(1+\delta^2)(1+2\delta^2)\dots(1+r\,\delta^2)} \qquad \left[\Delta = \left(\frac{\log\delta^{-2}}{\log 4}+1\right)\delta^{-1},\quad \delta\to 0\right]$$

$$= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\sum_{r=1}^{\Delta} r\,\delta\exp\{-(1+2+\cdots+r)\,\delta^2 + (1^2+2^2+\cdots+r^2)\,O(\delta^4)\}$$

$$= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\sum_{r=1}^{\Delta} r\,\delta\exp\left\{-\frac{r^2\delta^2}{2} + O(\Delta\,\delta^2) + O(\Delta^3\,\delta^4)\right\}$$

$$= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\sum_{r=1}^{\Delta} r\,\delta\exp(-r^2\,\delta^2/2)\{1+O(\Delta^3\,\delta^4)\}$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x\,e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

For,

$$\delta\sum_{r=1}^{\Delta} r\,\delta\exp(-r^2\,\delta^2/2) = \delta\sum_{\delta\le r\delta<1+\delta}\cdots + \delta\sum_{1+\delta\le r\delta\le\Delta\delta}\cdots = I_1 + I_2 \text{ say,}$$

where

$$I_1 \to \int_0^1 x\,e^{-x^2/2}\,dx \quad \text{as} \quad \delta\to 0,$$

and, since $x\,e^{-x^2/2}$ is monotonic decreasing for $x \ge 1$,

$$I_2\left\{\begin{array}{l} < \displaystyle\int_1^{(\Delta-1)\delta} x\,e^{-x^2/2}\,dx \\ > \displaystyle\int_{1+2\delta}^{(\Delta+1)\delta} x\,e^{-x^2/2}\,dx\end{array}\right\} \to \int_1^\infty x\,e^{-x^2/2}\,dx \quad \text{as} \quad \delta\to 0.$$

Therefore (3.22) is proved, and in the same way it can be prooved that

(3.23) $$s_3 \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Using (3.22) and (3.23) in (3.21), we obtain

$$S_2 \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad k \to \infty, \tag{3.24}$$

and finally, from (3.18), (3.20), (3.24) we get (3.17) and thence (3.16).

The following result, implicit in Theorem 1b, extends to BOREL summability TAUBER's theorem on series $\sum a_n$ which are ABEL-summable and such that $n a_n = o(1)$.

Corollary 1b. *Suppose that $\sum a_n$ satisfies (3.4) and $B(x)$ is defined as in (3.5). Suppose that Ω denotes the set of limit points of $A(x)$ as $x \to \infty$ and Ω_B the set of limit points of $B(x)$ as $x \to \infty$. Then, to each $\xi' \in \Omega$ corresponds a $\xi'' \in \Omega_B$, and conversely, such that*

$$|\xi' - \xi''| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, L.$$

The constant $\sqrt{2/\pi}$ in the above inequality will probably turn out to be the best (i.e. the least) possible for the passage from ξ' to ξ''.

In particular, when $L = 0$, the limit points of $A(x)$ and $B(x)$ are identical.

4. Applications to Riesz, Laplace-Abel, Lambert and Stieltjes summabilities. The next theorem is an immediate consequence of Theorem A.

Theorem 2a. *Suppose that $A(u)$ is a function of bounded variation in every finite interval of $u \geq 0$ and that hypothesis* (c) *of Theorem A is satisfied with $\Lambda(u) = u$, i.e.*

$$\overline{\lim_{u \to \infty}} \; \overline{\operatorname{bound}_{u \leq u' \leq \lambda u}} \; |A(u') - A(u)| \leq K \log \lambda, \qquad \lambda > 1.$$

Suppose also that, in Theorem A,

$$\psi(x, u) = \frac{1}{x}\, \psi^*\left(\frac{u}{x}\right)$$

where $\psi^*(u)$ satisfies the conditions

$$\psi^*(u) \geq 0, \qquad \int_0^\infty \psi^*(u)\, |\log u|\, du \text{ exists}, \qquad \int_0^\infty \psi^*(u)\, du = 1 \tag{4.1}$$

with the result that hypotheses (b) *of Theorem A are satisfied with $\Lambda(u) = u$, $\gamma = \alpha x$,*

$$N_{x,\gamma}(u) = \alpha\, \psi^*(\alpha u), \qquad N(u) = F(u) = \alpha\, \psi^*(\alpha u).$$

Then $\Psi^*(x)$ defined by

$$\Psi^*(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty \psi^*\left(\frac{u}{x}\right) A(u)\, du$$

satisfies the inequality

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \; |\Psi^*(x) - A(\alpha x)| \leq K \int_0^\infty \alpha\, \psi^*(\alpha u)\, |\log u|\, du. \tag{4.2}$$

Remark. If, in Theorem 2a, $A(0) = 0$ and we write

$$\varphi^*(u) = \int_u^\infty \psi^*(x)\, dx, \tag{4.3}$$

then

$$\Psi^*(x) \equiv \Phi^*(x) = \int_0^\infty \varphi^*\left(\frac{u}{x}\right) d\, A(u),$$

and consequently the conclusion (4.2) of Theorem 2a can be written in the form

$$\overline{\lim_{y\to\infty}}\left|\Phi^*\left(\frac{y}{\alpha}\right)-A(y)\right|\leq K\,\tau(\alpha) \tag{4.2'}$$

where

$$\tau(\alpha)=\int_0^1\frac{1-\varphi^*(\alpha u)}{u}\,du+\int_1^\infty\frac{\varphi^*(\alpha u)}{u}\,du.$$

Theorem 2a with conclusion in the form (4.2') is a simplified version of a theorem of DELANGE ([2], Théorème 3) and it covers the summability processes of RIESZ, LAPLACE-ABEL, STIELTJES and LAMBERT in which

$$\begin{cases}\varphi^*(u)=(1-u)^k, & k>0, \quad \text{for} \quad u\leq 1, \quad \text{and} \quad \varphi^*(u)=0 \quad \text{for} \quad u>1,\\ \varphi^*(u)=e^{-u}, \quad \varphi^*(u)=(1+u)^{-\varrho}, & \varrho>0,\\ \varphi^*(u)=u/(e^u-1) \quad \text{for} \quad u\neq 0, & \varphi^*(0)=1,\end{cases} \tag{4.4}$$

respectively and $\psi^*(u)$ satisfies (4.1).

There are consequences of Theorem 2a analogous to Theorem 1b and Corollary 1b. These are known but stated below for the sake of completeness.

Theorem 2b. *Let*

$$\Phi_\lambda^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi^*(\lambda_n/x), \qquad x>0, \qquad 0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots, \qquad \lambda_n\to\infty,$$

where $\varphi^*(u)$ is defined as in (4.3) *and $\psi^*(u)$ satisfies* (4.1). *Let*

$$a_n=O\left(\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right), \qquad \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\sim 1, \qquad n\to\infty.$$

Then

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\Phi_\lambda^*\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\sum_{\lambda_n\leq x}a_n\right|\leq\tau(\alpha)\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{|a_n|\,\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}$$

where $\tau(\alpha)$ is the same as the constant in (4.2').

The conclusion stated above is the best possible on our suppositions since the equality sign in it cannot be omitted.

The reader may refer to DELANGE's paper ([2], §§ 3.5.1, 3.5.2) for the complete details of the proof of Theorem 2b.

Corollary 2b. *In Theorem* 2b, *suppose that $\varphi^*(u)$ is monotonic decreasing in the strict sense so that the inverse function $\varphi^{-1*}(u)$ exists for $0<u\leq 1$. Then*

$$\min\tau(\alpha)=\tau(\alpha_0), \qquad \alpha_0=\varphi^{-1*}(1/2),$$

and $\tau(\alpha_0)$ has the property stated below.

Let $\mathfrak{L}$ denote the set of limit points of $\sum_{\lambda_n\leq x}a_n$ as $x\to\infty$ and $\mathfrak{L}_{\Phi^*}$ the set of limit points of $\Phi_\lambda^*(x)$ as $x\to\infty$. Then, to each $\xi'\in\mathfrak{L}$ corresponds a $\xi''\in\mathfrak{L}_{\Phi^*}$, and conversely, such that

$$|\xi'-\xi''|\leq\tau(\alpha_0)\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{|a_n|\,\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}.$$

Corollary 2b was first proved by AGNEW in the case $\varphi^*(u)=e^{-u}$, $\lambda_n=n$ (Reference in [1]). The extension of AGNEW's result to the other $\varphi^*(u)$ in (4.4) was subsequently indicated by me ([5], Corollary 1.1).

To make the list of references complete, I may add that I have recently obtained [6] a complement of Theorem 2b in the case of the $\varphi^*(u)$ in (4.4), with $k \geqq 1$ in the case of the Riesz kernel, assuming a one-sided Tauberian hypothesis on a_n instead of the two-sided hypothesis $a_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)$.

5. Conclusion. This note has aimed at bringing together some absolute constants which emerge when the familiar processes of summability are applied to a function $A(u)$ satisfying a Tauberian condition in the standard O-form of either Schmidt or Hardy. In closing the note I wish to acknowledge my indebtedness to Dr. T. Vijayaraghavan who obtained Theorem 1b independently after I had mentioned to him the possibility of an absolute constant connected with Borel summability, constructing the particular example reproduced by me in the proof of that theorem.

Added November 3, 1952. After writing the preceding paper, I was able to prove that $\tau(\alpha_0)$ *is the best (or least) possible constant in the inequality of Corollary* 2b *between* ξ' *and* ξ'', *for the passage from* ξ' *to* ξ''. My proof is built on the same idea as a similar proof of R. P. Agnew in his recent paper *Integral transformations and Tauberian constants*, Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 501—518 (1952), though it was completed before I saw Agnew's paper. The chief difference between the two proofs is as follows. Agnew's proof is concerned with the transform

$$\Phi^*(x) = \int_0^\infty \varphi^*\left(\frac{u}{x}\right) dA(u) \qquad \text{where} \qquad A(u) = \int_0^u a(x)\, dx$$

and $a(x)$ is a real and continuous function of $x \geqq 0$. But my proof involves the transform $\Phi_\lambda^*(x)$ of Theorem 2b in which we have a sequence $\{a_n\}$ and a λ-step function, $A(u) = \sum_{\lambda_n \leq u} a_n$ instead of $a(x)$ and its integral over $(0, u)$. Consequently, Agnew's proof runs more smoothly than mine.

References.

[1] Agnew, R. P.: Abel transforms and partial sums of Tauberian series. Ann. of Math. **50**, 110—117 (1949). — [2] Delange, H.: Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergents (Premier mémoir). Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **67**, 99—160 (1950). — [3] Karamata, J.: Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité. Actual. sci. industr. No. **450**, VI (1937). — [4] Karamata, J.: Über allgemeine O-Umkehrsätze. Bull. int. Acad. Yougosl. Sci. **32**, 1—9 (1939). — [5] Rajagopal, C. T.: On a generalization of Tauber's theorem. Comm. Math. Helv. **24**, 219—231 (1950). — [6] Rajagopal, C. T.: Two one-sided Tauberian theorems. Archiv der Math. **3**, 108—113 (1952). — [7] Vijayaraghavan, T.: A theorem concerning the summability of series by Borel's method. Proc. London Math. Soc. (2) **27**, 316—326 (1926). — [8] Wiener, N.: Tauberian theorems. Ann. of Math. **33**, 1—100 (1932).

Ramanujan Institute of Mathematics Madras (India).

(Eingegangen am 20. Juli 1952.)

Davies, E. T.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 415—427 (1953)

On the Invariant Theory of Contact Transformations.

By
Evan T. Davies.

The application of tensor methods to the study of contact transformations has been carried out by several authors[1]). Eisenhart and Knebelman were the first to put the study on a systematic basis by their introduction of a set of "contact frames" which enabled them to decompose a "configuration" A of $2n$ components in the phase space of $2n$ coordinates x^i and p_i into two "vectors" λ and μ of n components each. Their decomposition is not however satisfactory in respect of one of the components. This partial decomposition was completed independently by Doyle on the one hand, and by Muto and Yano on the other. The method used in each case was that of introducing a second set of contact frames. Doyle introduces the notion of non-holonomic subspaces of the phase spaces with projection tensors in these subspaces. In introducing an affine connection in these subspaces however, he imposes a severe restriction which is equivalent to assuming that all the Eulerian Curvature tensors vanish, so that the subspaces are all "planes".

In this paper we follow Doyle in his use of non-holonomic subspaces, making systematic use of the works of Vranceanu [5][2]), Schouten [6], and Dienes [7] on non-holonomic spaces. We shall show that (i) the "connecting quantities" of Schouten lead naturally to the two sets of contact frames, (ii) the restrictions imposed by Doyle in determining the connection coefficients are not necessary, (iii) a generalization of geometries involving a covariant vector as *element of support* [8] occurs naturally by considering the non-holonomic subspaces of a space whose tensors are functions of position only.

§ 1.

We start with an affinely related space V_N with a Euclidean connection. We take its dimension to be $N = 2n$. Our convention with regard to indices will be that Dienes [7], that Greek indices shall apply to functions (tensors, coefficient of connection etc) under ordinary changes of variables and the rules of the classical Ricci Calculus. Latin indices will apply to quantities which are to be called tensors etc, under a more general "change of base". The indices will run as follows

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, N; \qquad \lambda, \mu, \nu = 1, \ldots, n; \qquad \varrho, \sigma, \tau = n+1, \ldots, N$$
$$a, b, c = 1, \ldots, N; \quad i, j, k, l, m, n = 1, \ldots, n; \quad p, q, r, s = n+1, \ldots, N.$$

[1]) See papers [1], [2], [3], [4] in the list at the end.
[2]) These numbers refer to the list of papers at the end.

The V_N will have a metric tensor $g_{\alpha\beta}(x^\alpha)$ and a torsion tensor $S^{\cdot\cdot\alpha}_{\beta\gamma}(x^\alpha)$ so that the coefficients of affine connection $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x^\alpha)$ can be expressed in terms of these two tensors.

If a submanifold V_n of V_N is characterized by n equations $\Phi^\sigma(x', \ldots, x^N) = 0$ having a Jacobian of rank n, this can be used to obtain parametric equations of V_n in the form

$$x^\alpha = \psi^\alpha(u', \ldots, u^n) = \psi^\alpha(u^\lambda)$$

and the connecting quantities, or projection factors

$$B^\alpha_\lambda = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^\lambda}, \qquad C^\sigma_\alpha = \frac{\partial \Phi^\sigma}{\partial x^\alpha}$$

and their reciprocals can be used to define subordinate quantities in the V_n such as the metric coefficients $g_{\lambda\mu} = g_{\alpha\beta} B^\alpha_\lambda B^\beta_\mu$ and the coefficients of affine connection

$$l^\lambda_{\mu\nu} = B^\lambda_\alpha \left(\frac{\partial B^\alpha_\mu}{\partial u^\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} B^\beta_\mu B^\gamma_\nu \right).$$

In the study of non-holonomic subspaces the projection factors are no longer partial derivatives but general functions of x^α. The ordinary RICCI tensors are replaced by *geometrical* tensors such as $g_{ab} = g_{\alpha\beta} A^\alpha_a A^\beta_b$ which obey more general laws of transformation $g_{a'b'} = g_{ab} A^a_{a'} A^b_{b'}$ where $A^a_{a'}$ are not partial derivatives. Another difference is that instead of having a unique submanifold at which vectors will be divided into tangential and normal vectors we shall have a splitting up of vectors into these two classes at every point of the $2n$-dimensional space so that a v^α (in V_N) will have two components

(1.1) (a) $v^i = B^i_\alpha v^\alpha$ (in V_N^n); (b) $v^\flat = C^\flat_\alpha v^\alpha$ (in V_N^{N-n}).

Each component will be a *geometrical* tensor in the sense that for a change of base (as distinct from a change of coordinates) they will obey laws of transformation

(1.2) (a) $v^{i'} = v^i B^{i'}_i$ (b) $v^{\flat'} = v^\flat C^{\flat'}_\flat$

where the $B^{i'}_i$ and $C^{\flat'}_\flat$ are not partial derivatives.

Covariant derivation of such geometrical tensors will be defined by the four sets of connection parameters appearing in the following table

(1.3) $\nabla_k v^i = X_k v^i + l^i_{jk} v^j, \qquad \nabla_k v^\flat = X_k v^\flat + \lambda^\flat_{rk} v^r; \qquad X_k = B^\alpha_k \partial_\alpha$

(1.4) $\nabla_s v^i = X_s v^i + s^i_{js} v^j, \qquad \nabla_s v^\flat = X_s v^\flat + \sigma^\flat_{rs} v^r; \qquad X_s = C^\alpha_s \partial_\alpha$

the connection parameters are determined in terms of those of the general V_N by the formulae

(1.5) $l^i_{jk} = B^i_\alpha \nabla_k B^\alpha_{(j)}, \quad \lambda^\flat_{rk} = C^\flat_\alpha \nabla_k C^\alpha_{(r)}, \quad s^i_{js} = B^i_\alpha \nabla_s B^\alpha_{(j)}, \quad \sigma^\flat_{rs} = C^\flat_\alpha \nabla_s C^\alpha_{(r)}.$

The Eulerian Curvature tensors in such a geometry are given by

(1.6) $F^\flat_{jk} = C^\flat_\alpha \nabla_k B^\alpha_{(j)}, \quad G^i_{rk} = B^i_\alpha \nabla_k C^\alpha_{(r)}; \quad J^\flat_{js} = C^\flat_\alpha \nabla_s B^\alpha_{(j)}, \quad K^i_{rs} = B^i_\alpha \nabla_s C^\alpha_{(r)}.$

The laws of transformation of the quantities (1.5) are given by the general rules

$$\nabla_k B_i^{i'} = 0, \qquad \nabla_k C_p^{p'} = 0, \qquad \nabla_s B_i^{i'} = 0, \qquad \nabla_s C_p^{p'} = 0, \tag{1.7}$$

so that

$$X_k B_i^{i'} + l_{j'k'}^{i'} B_j^{j'k'} - l_{jk}^{i} B_i^{i'} = 0, \ldots, X_s C_p^{p'} + \sigma_{r's'}^{p'} C_{rs}^{r's'} - \sigma_{rs}^{p} C_p^{p'} = 0 \tag{1.8}$$

and the quantities (1.6) are geometrical tensors, i.e.

$$F_{j'k'}^{p'} = F_{jk}^{p} C_p^{p'} B_{j'k'}^{jk}, \ldots, K_{r's'}^{i'} = K_{rs}^{i} B_i^{i'} C_{r's'}^{rs}. \tag{1.9}$$

We shall need to use the following relations satisfied by the projection factors:

$$\left\{\begin{array}{lll} B_i^\alpha B_\alpha^j = \delta_i^j; & C_p^\alpha C_\alpha^r = \delta_p^r; & B_i^\alpha C_\alpha^p = 0; \quad B_\alpha^i C_p^\alpha = 0 \\ B_\alpha^a = B_i^a B_\alpha^i; & C_a^\alpha = C_p^\alpha C_a^p; & B_\alpha^a + C_\alpha^a = A_\alpha^a \\ B_\beta^\alpha = B_i^\alpha B_\beta^i; & C_\beta^\alpha = C_r^\alpha C_\beta^r; & B_\beta^\alpha + C_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha \end{array}\right. \tag{1.10}$$

and the following alternation formulae

$$\nabla_{[l} \nabla_{k]} v^i = -\{l_{[kl]}^m + B_\alpha^m X_{[l} B_{k]}^\alpha\} \nabla_m v^i + C_\alpha^p X_{[l} B_{k]}^\alpha \nabla_p v^i + C_{mkl}^i v^m \tag{1.11}$$

$$\nabla_{[t} \nabla_{s]} v^i = -\{\sigma_{[st]}^q + C_\alpha^q X_{[t} C_{s]}^\alpha\} \nabla_q v^i + B_\alpha^i X_{[t} C_{s]}^\alpha \nabla_j v^i + C_{mst}^i v^m \tag{1.12}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla_s \nabla_k v^i - \nabla_k \nabla_s v^i = -\{s_{ks}^m + B_\alpha^m X_k C_s^\alpha - B_\alpha^m X_s B_k^\alpha\} \nabla_m v^i + \\ \qquad + \{\lambda_{st}^q + C_\alpha^q X_s B_q^\alpha - C_\alpha^q X_k C_s^\alpha\} \nabla_q v^i + 2 C_{mks}^i v^m \end{array}\right. \tag{1.13}$$

where

$$C_{mkl}^i = X_{[l} l_{m\,k]}^i + l_{n\,[l}^i l_{m\,k]}^n - B_\alpha^n X_{[t} B_{k]}^\alpha l_{mn}^i - C_\alpha^q X_{[l} B_{k]}^\alpha s_{mq}^i \tag{1.14}$$

$$C_{mst}^i = X_{[t} s_{m|s]}^i + s_{n\,[t}^i s_{m\,s]}^n - B_\alpha^i X_{[t} C_{s]}^\alpha l_{mj}^i - C_\alpha^q X_{[t} C_{s]}^\alpha s_{mq}^i \tag{1.15}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2 C_{mks}^i = X_s l_{mk}^i - X_k s_{ms}^i + s_{ns}^i l_{mk}^n - l_{nk}^i s_{ms}^n - \\ \qquad - l_{mj}^i (B_\alpha^j X_s B_k^\alpha - B_\alpha^j X_k C_s^\alpha) + s_{mq}^i (C_\alpha^q X_k C_s^\alpha - C_\alpha^q X_s B_k^\alpha). \end{array}\right. \tag{1.16}$$

The metric coefficients in the facet V_N^n and in the span V_N^{N-n} are given respectively by

$$\text{(a)} \quad g_{ij} = g_{\alpha\beta} B_{ij}^{\alpha\beta} \qquad \text{(b)} \quad g_{pq} = g_{\alpha\beta} C_{pq}^{\alpha\beta}. \tag{1.17}$$

We assume that the span vectors C_p^α are orthogonal to the facet, so that

$$g_{\alpha\beta} B_i^\alpha C_p^\beta = 0. \tag{1.18}$$

The ds^2 for the general space V_N can then be written in the form

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = g_{ij} (dx)^i (dx)^j + g_{pq} (dx)^p (dx)^q \tag{1.19}$$

where $(dx)^i = B_\alpha^i dx^\alpha$ and $(dx)^p = C_\alpha^p dx^\alpha$ are of course not exact differentials and hence have a bracket round the dx to indicate the fact.

Two near points in the same facet will be characterized by

$$(dx)^p = 0. \tag{1.20}$$

The upper index g's defined by

$$(1.21) \quad \text{(a)} \quad g^{ij} = g^{\alpha\beta} B^{ij}_{\alpha\beta} \qquad \text{(b)} \quad g^{pq} = g^{\alpha\beta} C^{pq}_{\alpha\beta}$$

are also the reciprocals of the corresponding lower index g's (assuming that the relevant determinants do not vanish), so that if

$$\xi^i = B^i_\alpha X^\alpha, \quad \xi_i = B^\alpha_i X_\alpha, \quad \xi^p = C^p_\alpha X^\alpha, \quad \xi_p = C^\alpha_p X_\alpha$$

then

$$\xi_i = g_{ij} \xi^j; \qquad \xi_p = g_{pq} \xi^q.$$

Finally, with the definitions given of the various projected connections, we can easily prove that

$$V_k g_{ij} = B^\gamma_k B^{\alpha\beta}_{ij} (V_\gamma g_{\alpha\beta}) \qquad V_s g_{ij} = C^\gamma_s B^{\alpha\beta}_{ij} (V_\gamma g_{\alpha\beta})$$

$$V_k g_{rs} = B^\gamma_k C^{\alpha\beta}_{rs} (V_\gamma g_{\alpha\beta}) \qquad V_p g_{rs} = C^\gamma_p C^{\beta\gamma}_{rs} (V_\gamma g_{\alpha\beta})$$

and hence they all vanish since V_N is assumed to have a Euclidean connection.

§ 2.

Let us now consider what particular form the quantities $B^{i'}_i$, $C^{p'}_p$ representing a general change of base must have in order that the expressions

$$\text{(a)} \quad X_i f = B^\alpha_i \partial_\alpha f \qquad \text{(b)} \quad X_p f = C^\alpha_p \partial_\alpha f$$

may transform according to the rules

$$\text{(a)} \quad X_i f = B^{i'}_i X_{i'} f \qquad \text{(b)} \quad X_p f = C^{p'}_p X_{p'} f.$$

These written out in full mean respectively

$$\text{(a)} \quad B^\alpha_i \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = B^{i'}_i B^{\alpha'}_{i'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \qquad \text{(b)} \quad C^\alpha_p \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = C^{p'}_p C^{\alpha'}_{p'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

so that

$$(2.1) \quad \text{(a)} \quad B^\alpha_i = B^{i'}_i B^{\alpha'}_{i'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = B^{i'}_i X_{i'} x^\alpha, \quad \text{(b)} \quad C^\alpha_p = C^{p'}_p C^{\alpha'}_{p'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = C^{p'}_p X_{p'} x^\alpha.$$

Again, if we write

$$\text{(a)} \quad (dx)^i = B^i_\alpha dx^\alpha \qquad \text{(b)} \quad (dx)^p = C^p_\alpha dx^\alpha$$

the bracket round the dx indicating that $(dx)^i$ is *not* an exact differential, and consider the transformations

$$\text{(a)} \quad (dx)^{i'} = B^{i'}_i (dx)^i \qquad \text{(b)} \quad (dx)^{p'} = C^{p'}_p (dx)^p$$

we shall get

$$(2.2) \quad \text{(a)} \quad B^{i'}_{\alpha'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = B^{i'}_i B^i_\alpha \qquad \text{(b)} \quad C^{p'}_{\alpha'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = C^{p'}_p C^p_\alpha.$$

The basic systems of partial differential equations appearing in DOYLE's work ([3], equations 1.1 and 1.2) are

$$(2.3) \qquad (a)\quad X_i f = 0 \qquad (b)\quad X_p f = 0$$

for the case in which the projection factors B_i^α and C_p^α take the special forms in which $B_i^\lambda = \delta_i^\lambda$, $C_p^\varrho = \delta_p^\varrho$ so that (2.3) becomes

$$(2.4) \quad (a)\quad X_i f = \delta_i^\lambda \delta_\lambda f + B_i^\varrho \partial_\varrho f = 0, \qquad (b)\quad X_p f = \delta_p^\varrho \partial_\varrho f + C_p^\lambda \partial_\lambda f = 0.$$

At this stage the distinction between Latin and Greek indices will not be required, and the existence of the two sets of indices running over the same ranges becomes inconvenient, so that henceforth only Latin indices will be used.

With the projection factors modifying as follows

$$B_i^\alpha \to (\delta_i^i, B_i^p) \qquad C_p^\alpha \to (\delta_p^q, C_p^j)$$

the relations (1.9) become

$$(2.5) \quad (a)\ B_i^p B_p^j = 0 \quad (b)\ C_p^j C_j^r = 0 \quad (c)\ C_i^p + B_i^p = 0 \quad (d)\ C_p^i + B_p^i = 0.$$

If we use (2.5) (c) and (d) we can in future always replace C_i^p by $-B_i^p$ and B_p^i by $-C_p^i$, and (2.5) (a) and (b) become

$$(2.6) \qquad (a)\quad B_i^p C_p^j = 0 \qquad (b)\quad C_p^j B_j^r = 0.$$

We now examine the special forms which the relations (2.1) take for these special values of the projection factors. Putting $\alpha = j$ in (2.1) (a) and $\alpha = q$ in (2.1) (b) we get

$$(2.7) \qquad (a)\quad \delta_i^j = B_i^{i'} X_{i'} x^j \qquad (b)\quad \delta_p^q = C_p^{p'} X_{p'} x^q$$

from which we immediately deduce

$$(2.8) \qquad (a)\quad B_i^{i'} = X_i x^{i'} \qquad (b)\quad C_p^{p'} = X_p x^{p'}$$

which are the special forms of any transformations of the form (1.2) which we consider for the remainder of the paper. With these particular values for $B_i^{i'}$ and $C_p^{p'}$ the equations giving the transformation of the connection parameters in (1.8) coincide with those given by DOYLE ([3], eqns. 5.3).

Again putting $\alpha = q$ in (2.1) (a) and $\alpha = j$ in (2.1) (b) we get, on using (2.8)

$$(2.9) \qquad (a)\quad B_i^q = X_i x^{i'} \cdot X_{i'} x^q \qquad (b)\quad C_p^j = X_p x^{p'} \cdot X_{p'} x^j$$

which we shall retain in the form

$$(2.10) \qquad (a)\quad B_i^p X_{j'} x^i = X_{j'} x^p \qquad (b)\quad C_q^i X_{p'} x^q = X_{p'} x^i.$$

We shall also need some relations deducible from (2.2). On putting $\alpha = j$ in (2.2) (a) and $\alpha = p$ in (2.2) (b) we get

$$(2.11) \quad (a)\quad X_i x^{i'} \cdot \delta_j^i = \delta_{j'}^{i'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} + B_{p'}^{i'} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} \qquad (b)\quad X_q x^{p'} \delta_p^q = \delta_{q'}^{p'} \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^p} + C_{j'}^{p'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^p}$$

which, on using (2.5) (c) and (d) and expanding give

$$(2.12)\qquad (a)\quad B_j^{\dot p}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\dot p}}=-C_{\dot p'}^{i'}\frac{\partial x^{\dot p'}}{\partial x^j}\qquad (b)\quad C_{\dot p}^{j}\frac{\partial x^{\dot p'}}{\partial x^j}=-B_{j'}^{\dot p'}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\dot p}}.$$

With the above conventions about the projection factors the components of the projection in the V_N^n and in the V_N^{N-n} of any contravariant vector Λ^α of V_N become

$$(2.13)\qquad (a)\quad \lambda^i=\Lambda^i-C_{\dot p}^i\Lambda^{\dot p}\qquad (b)\quad \lambda^{\dot p}=\Lambda^{\dot p}-B_j^{\dot p}\Lambda^j$$

and the components of the projections of any covariant vector Π_α become

$$(2.14)\qquad (a)\quad \pi_i=\Pi_i+B_i^{\dot p}\Pi_{\dot p}\qquad (b)\quad \pi_{\dot p}=\Pi_{\dot p}+C_{\dot p}^j\Pi_j.$$

It will follow immediately that

$$(2.15)\qquad \lambda^i\pi_i+\lambda^{\dot p}\pi_{\dot p}=\Lambda^\alpha\Pi_\alpha=\Lambda^i\Pi_i+\Lambda^{\dot p}\Pi_{\dot p}$$

and in particular the differential df of a function of x^α can be written

$$(2.16)\qquad df=\partial_i f\,dx^i+\partial_{\dot p}f\,dx^{\dot p}=X_i f\,(dx)^i+X_{\dot p}f\cdot(dx)^{\dot p}.$$

§ 3. Contact Transformations.

If the $2n$ coordinates are those appropriate to the study of contact transformations (x^i, p_i) we follow EISENHART and DOYLE in the convention that the $(n+i)$ th components of a general contravariant (covariant) vector in V_{2n} shall be given a lower (upper) index i, and we similarly make the convention indicated by writing B_j^{n+i} and C_{n+i}^j as B_{ji} and C^{ji} respectively so that the equations (2.10) and (2.11) become

$$(3.1)\qquad (a)\quad \lambda^i=\Lambda^i-C^{ij}\Lambda_j\qquad (b)\quad \lambda_i=\Lambda_i-B_{ji}\Lambda^j$$

$$(3.2)\qquad (a)\quad \pi_i=\Pi_i+B_{ij}\Pi^j\qquad (b)\quad \pi^i=\Pi^i+C^{ji}\Pi_j.$$

In order to use the symmetry of the B_{ij} and C_{ij} we make the hypothesis that the fundamental invariant of the contact group $dx^i\delta p_i-dp_i\delta x^i$ ([1], p. 751) shall satisfy

$$(3.3)\qquad dx^i\delta p_i-dp_i\delta x^i=(dx)^i(\delta p)_i-(dp)_i(\delta x)^i$$

which demands the symmetry required. Under these conditions the relations (2.6) reduce to the single one

$$(3.4)\qquad B_{ik}C^{jk}=0.$$

The functions occurring in the transformation laws for span components $\lambda^{\dot p'}=\lambda^{\dot p}X_{\dot p}x^{\dot p'}$ must also be modified, for $\frac{\partial x^{\dot p'}}{\partial x^{\dot p}}+C_{\dot p}^j\frac{\partial x^{\dot p'}}{\partial x^j}$ becomes

$$(3.5)\qquad \frac{\partial p_{i'}}{\partial p_i}+C^{ij}\frac{\partial p_{i'}}{\partial x^j}=X^i p_{i'}.$$

If we now take account of the fundamental equations defining a contact transformation, namely

$$(3.6)\quad \partial^{i'} p_i = \partial_i x^{i'}, \qquad \partial^{i'} x^i + \partial^i x^{i'} = 0, \qquad \partial_{i'} p_i + \partial_i p_{i'} = 0; \qquad \partial^i = \frac{\partial}{\partial p_i}$$

and of the forms which (2.14) and (2.15) now take, namely

$$(3.7)\quad \text{(a)}\quad B_{ij}\,\partial^j x^{i'} = -\,C^{i'j'}\,\partial_i p_{j'} \qquad \text{(b)}\quad C^{ji}\,\partial_j p_{i'} = -\,B_{i'j'}\,\partial^i x^{j'}$$

we get

$$(3.8)\quad X^i p_{i'} = X_{i'} x^i.$$

The projections of a vector v^α of V_N upon the facet V_N^n and on the span V_N^{N-n}, namely v^i and v^p of (1.1) each constitute a *geometrical* tensor as indicated in (1.2). The corresponding terminology for the particular values of $B_i^{i'}$ and $C_p^{p'}$ now taken will be that the projections $(\lambda^i,\ \lambda^{n+i} = \lambda_i)$ of a contravariant vector Λ^α of V_N will each constitute a *contact* tensor, with laws of transformation

$$(3.9)\quad \text{(a)}\quad \lambda^{i'} = \lambda^i X_i x^{i'} \qquad \text{(b)}\quad \lambda_{i'} = \lambda_i X^i p_{i'}.$$

Similarly for the projections $(\pi_i,\ \pi_{n+i} = \pi^i)$ of a covariant vector Π_α of V_N

$$(3.10)\quad \text{(a)}\quad \pi_{i'} = \pi_i X_{i'} x^i \qquad \text{(b)}\quad \pi^{i'} = \pi^i X^{i'} p_i.$$

But (3.8) shows the identity of the laws of transformation of a quantity with a lower (upper) index whether it is associated with Λ^α or with Π_α. A lower (upper) index will therefore indicate a covariant (contravariant) *contact* tensor.

In view of the identification $C_p^{p'} \to C_{n+i}^{n+i'} \to B_i^{i'}$ in the case of contact transformations, the four sets of connection parameters whose laws of transformation are given in (1.7) merge into two sets according to the rules $\lambda_{n-j,\,n+k}^{n-i} \to -\,l_{jk}^i$ $\sigma_{n+j,\,n+k}^{n+i} \to -\,s_i^{jk}$ so that for the remainder of the paper we shall have just two sets of connection parameters which we shall denote by $\Gamma_{jk}^i(x, p)$ and $C_i^{jk}(x, p)$. We shall assume that the Γ_{jk}^i and C_i^{jk} are homogeneous of degree 0 and -1 respectively in the p. The two sets of contact frames will have laws of transformation obtained by modifying (2.10) into

$$(3.11)\quad \text{(a)}\quad B_{ij} X_{j'} x^i = X_{j'} p_j \qquad \text{(b)}\quad C^{ij} X^{i'} p_j = X^{i'} x^i.$$

We must now give the form taken on by the various "non-holonomity" objects occurring in the formulae (1.10) — (1.15), they are

$$B_\alpha^m X_{[l} B_{k]}^\alpha \to -\,C^{mn} X_{[l} B_{k]n}; \qquad C_\alpha^p X_{[l} B_{k]}^\alpha \to X_{[l} B_{k]i}$$

$$C_\alpha^q X_{[l} C_{s]}^\alpha \to -\,B_{mj} X^{[l} C^{k]m}; \qquad B_\alpha^j X_{[l} C_{s]}^\alpha \to X^{[l} C^{k]i}$$

$$B_\alpha^m X_k C_s^\alpha \to X_k C^{mj}; \qquad B_\alpha^m X_s B_k^\alpha \to -\,C^{mj} X^l B_{kj}$$

$$C_\alpha^q X_k C_s^\alpha \to -\,B_{im} X_k C^{ml}; \qquad C_\alpha^q X_s B_k^\alpha \to X^j B_{kl}.$$

The three alternation formulae already given in § 1 will now become

$$\nabla_{[l}\nabla_{k]}v^i = -\{\Gamma^m_{[lk]} - C^{mn}X_{[l}B_{k]n}\}\nabla_m v^i + X_{[l}B_{k]m}\nabla^m v^i + v^m R^i_{mkl} \tag{3.12}$$

$$\nabla^{[l}\nabla^{k]}v^i = -\{C^{[kl]}_m - B_{jm}X^{[l}C^{k]j}\}\nabla^m v^i + X^{[l}C^{k]m}\nabla_m v^i + v^n S^{ikl}_m \tag{3.13}$$

$$\left\{\begin{aligned}\nabla^l\nabla_k v^i - \nabla_k\nabla^l v^i = &-\{C^{ml}_k + X_k C^{ml} + C^{mj}X^l B_{kj}\}\nabla_m v^i + \\ &+\{-\Gamma^l_{mk} + X^l B_{mk} + B_{mj}X_k C^{jl}\}\nabla^m v^i + 2v^m P^{il}_{mk}\end{aligned}\right. \tag{3.14}$$

with

$$R^i_{mkl} = X_{[l}\Gamma^i_{|m|k]} + \Gamma^i_{n[l}\Gamma^n_{|m|k]} + X_{[l}B_{k]j}(\Gamma^i_{mn}C^{nj} - C^{ij}_m) \tag{3.15}$$

$$S^{ikl}_m = X^{[l}C^{|i|k]}_m + C^{i[l}_n C^{|n|k]}_m - X^{[l}C^{k]j}(\Gamma^i_{mj} - B_{jn}C^{in}_m) \tag{3.16}$$

and

$$\left\{\begin{aligned}2P^{il}_{mk} = &X^l\Gamma^i_{mk} - X_k C^{il}_m + C^{il}_n\Gamma^n_{mk} - \Gamma^i_{nk}C^{nl}_m + \\ &+X^l B_{nk}(\Gamma^i_{mj}C^{nj} - C^{in}_m) + X_k C^{jl}(\Gamma^i_{mj} - B_{jn}C^{in}_m).\end{aligned}\right. \tag{3.17}$$

In dealing with the metric coefficients in the phase space of the (x, p) we notice that the convention of writing $g_{n+i,\,n+j}$ as g^{ij} would lead to confusion with the reciprocal of g_{ij} defined by $g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i$. To avoid this we write $g_{u+i,\,u+j}$ as $\bar{g}^{ij}$. The "distance" between two elements (x, p) and $(x+dx, p+dp)$ would then be

$$ds^2 = g_{ij}(x,p)(dx)^i(dx)^j + \bar{g}^{ij}(x,p)(dp)_i(dp)_j. \tag{3.18}$$

Corresponding to the restriction of having two near points in the same "facet" as expressed by (1.20) we now have

$$(dp)_i = dp_i - B_{ij}dx^j = 0. \tag{3.19}$$

The interpretation of this is given by EISENHART and KNEBELMAN, which is that two points will be regarded as lying on the same curve provided $x^i = x^i(t)$, $p_i = p_i(t)$ satisfy the condition

$$\frac{(dp)_i}{dt} = 0 \tag{3.20}$$

which is invariant for contact transformations.

We now have the necessary elements of a geometry in which the quantities (tensors etc) involve the position together with a covariant vector as element of support. We have not needed to make the assumption made by DOYLE that all the corresponding tensors to the Eulerian curvature tensors given in (1.6) vanish. The geometry thus introduced constitutes a generalization of the geometry based on a covariant vector [8] in that the transformations which it admits are not point transformations but contact transformations. The fundamental data are the metric and torsion tensors of the original V_N, together with the projection factors which enable us to define the quantities of the non-holonomic submanifold. The formulae corresponding to (1.22) prove that all the connections so obtained are Euclidean. Written in the present

notation, this would mean

$$(3.21) \qquad V_k g_{ij} = X_k g_{ij} - \Gamma^m_{ik} g_{mj} - \Gamma^m_{jk} g_{im} = X_k g_{ij} - \Gamma_{ijk} - \Gamma_{jik} = 0$$

$$(3.22) \qquad V^k g_{ij} = X^k g_{ij} - C^{mk}_i g_{mj} - C^{mk}_j g_{im} = X^k g_{ij} - C^k_{ij} - C^k_{ji} = 0.$$

If we make the hypothesis that normal coordinates exist for which we have the conditions ([3], theorem 10.1)

$$(3.23) \qquad p_i C^{ij} = 0, \qquad X^k C^{ij} - X^j C^{ik} = 0$$

and consequently p_i is a covariant vector both in the RICCI sense and with respect to contact transformations.

So far we have shown how the coefficients of affine connections can be determined in terms of those of the originally given V_N and the projection factors (ultimately the contact frames). We can now relate the connection coefficients and the contact frames still further by making the hypothesis

$$(3.24) \qquad \text{(a)} \quad V_j p_i = 0 \qquad \text{(b)} \quad V^j p_i = \delta^j_i$$

which give

$$(3.25) \qquad \text{(a)} \quad B_{ij} - \Gamma^m_{ij} p_m = 0 \qquad \text{(b)} \quad C^{mj}_i p_m = 0$$

and consequently also

$$(3.26) \qquad D p_i = (V_k p_i)(dx)^k + (V^k p_i)(dp)_k = (dp)_k = dp_k - \Gamma^m_{kj} p_m dx^j.$$

Let us restrict ourselves still further by assuming that we are dealing with normal coordinates for which

$$(3.27) \qquad C^{km} = 0$$

and that we consider only transformations which transform normal coordinates to normal coordinates, i.e. extended point transformations. This will make $(dx)^k$ become dx^k, and the absolute differential of any contravariant vector V^i becomes

$$(3.28) \qquad DV^i = dV^i + \Gamma^i_{jk} V^j dx^k + C^{ik}_j (dp_k - p_r \Gamma^r_{km} dx^m).$$

In order to make comparison with existing theories we introduce

$$(3.29) \qquad L^2 = g^{ij} p_i p_j, \qquad l_i = \frac{p_i}{L}, \qquad L C^{ik}_j = A^{ik}_j$$

and the restriction

$$(3.30) \qquad C^k_{ij} = C^k_{ji}$$

so that using (3.27) and (3.22) we have

$$(3.31) \qquad C^k_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial p_k}.$$

From the homogeneity of degree zero of the g_{ij} we get

$$(3.32) \qquad C^k_{ij} p_k = A^k_{ij} l_k = A^0_{ij} = 0$$

and hence using (3.25b)

$$A^k_{0j} = A^k_{i0} = A^0_{ij} = 0. \tag{3.33}$$

Writing

$$\omega_i = Dl_i = dl_i - l_n \Gamma^n_{im}\, dx^m = dl_i - \Gamma_{i0m}\, dx^m \tag{3.34}$$

the (3.28) may be written

$$DV^i = dV^i + \Gamma^i_{jk} V^j\, dx^k + A^{ik}_j \omega_k. \tag{3.31}$$

In the RICCI tensor theory of these spaces [8] the Γ^i_{jk} occurring in the (3.35) form of the absolute differential of a vector are assumed to be symmetrical in order that they may be determined in terms of the function L and its derivatives. Making the corresponding assumption in this case leads immediately to a very simple determination of the Γ functions in terms of the g and their derivatives. From (3.21) it follows immediately that if $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ or $\Gamma_{jik} = \Gamma_{kij}$ then Γ_{ijk} are the threeindex symbols of CHRISTOFFEL

$$\Gamma_{ijh} = \tfrac{1}{2}\{X_h g_{ij} + X_i g_{jh} - X_j g_{ih}\} \tag{3.36}$$

formed with the X_h instead of the ordinary derivative, the corresponding expression in the classical case being

$$\gamma_{ijh} = \tfrac{1}{2}\{\partial_h g_{ij} + \partial_i g_{jh} - \partial_j g_{ih}\}. \tag{3.37}$$

On using

$$X_h g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + B_{hr}\frac{\partial g_{ij}}{\partial p_r} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + \Gamma_{h0r} A^r_{ij}$$

we get

$$\Gamma_{ijh} = \gamma_{ijh} + A^r_{ij}\Gamma_{h0r} + A^r_{jh}\Gamma_{i0r} - A^r_{ih}\Gamma_{j0r} \tag{3.38}$$

and using (3.33), we have

$$\Gamma_{i0h} = \gamma_{i0h} - A^r_{ih}\Gamma_{00r}, \qquad \Gamma_{00h} = \gamma_{00h} \tag{3.39}$$

so that (3.39) becomes

$$\Gamma_{i0h} = \gamma_{i0h} - A^r_{ih}\gamma_{00r} \tag{3.40}$$

and (3.38) becomes consequently

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma_{ijh} &= \gamma_{ijh} + A^r_{ij}(\gamma_{h0r} - A^s_{hr}\gamma_{00s}) + \\ &\quad + A^r_{jh}(\gamma_{i0r} - A^s_{ir}\gamma_{00s}) - A^r_{ih}(\gamma_{j0r} - A^s_{jr}\gamma_{00s}) \end{aligned}\right. \tag{3.41}$$

giving the Γ_{ijh} entirely in terms of g's and their ordinary derivatives. All this will be generalized in the next paragraph.

With the assumptions now made the alternation formulae (3.12)–(3.14) become those appropriate to the geometry based on a covariant vector as element of support. We verify this easily in the case of (3.12). We note first of all that Γ^i_{jk} in this paragraph is written $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}$ in the older theory. With the

meaning just given to B_{ij} we have

$$X_{[l} B_{k]j} = \overset{*}{R}{}^{n}_{kjl} p_n, \qquad \text{and hence} \qquad X_{[l} B_{k]j} C^{ij}_{m} = A^{ij}_{m} \overset{*}{R}{}_{k0jl}$$

so that the (3.15) can be rewritten

$$R^{i}_{mkl} = \overset{*}{R}{}^{i}_{mkl} - A^{ij}_{m} \overset{*}{R}{}_{k0jl}.$$

The (3.12) may consequently be simplified to

$$\nabla_{[l} \nabla_{k]} v^i = \{\delta^i_n v^m + p_n \nabla^m v^i\} R^{n}_{mkl}$$

or to

$$\nabla_{[l} \nabla_{k]} v^i = \{\delta^i_n v^m + l_n v^i \|^m\} \overset{*}{R}{}^{n}_{mkl}$$

which coincides with the corresponding formula given previously ([8], eq. 6.2). Similarly we may make comparisons with the other alternation formulae.

§ 4.

We can also construct a geometry which shall be a generalization of the geometries based on a covariant vector by considering a fundamental function $L(x, p)$ which is positively homogeneous of degree one in the p. We again introduce the hypothesis expressed in (3.23) about the existence of normal coordinates in which the C^{ij} vanish, but we consider homogeneous contact transformations rather than extended point transformations. The contact tensor defined by

$$g^{ij} = X^j X^i (\tfrac{1}{2} L^2) \tag{4.1}$$

is symmetrical in its two indices, and may therefore be used to define metric in the space. We assume that B_{ij}, C^{ij} are homogeneous of degree 1 and -1 respectively in the p, and hence the g^{ij} will be homogeneous of degree zero in the p.

The right-hand side of (4.1) may be rewritten as

$$g^{ij} = L X^j X^i L + (X^i L)(X^j L) \tag{4.2}$$

and using the homogeneity of the L of degree 1 in the p, we get

$$g^{ij} p_j = L X^i L, \qquad g^{ij} p_i p_j = L^2 \tag{4.3}$$

so that we can define a unit vector

$$\text{(a)} \quad l_i = \frac{p_i}{L} \qquad\qquad \text{(b)} \quad l^i = g^{ij} l_j = X^i L \tag{4.4}$$

associated with the element of support. We shall assume that the relevant determinant does not vanish so that a reciprocal system g_{ij} can be uniquely defined.

If we introduce two sets of functions $\Gamma^{i}_{jk}(x, p)$ and $C^{ih}_{j}(x, p)$ homogeneous in the p of degree 0 and -1 respectively, we can define absolute derivation by

$$DV^i = dV^i + \Gamma^{i}_{jh} V^j (dx)^h + C^{ih}_{j} V^j (dp)_h. \tag{4.5}$$

We shall determine Γ^i_{jh} and C^{ih}_j in terms of L and its X_h and X^h derivatives by making hypotheses exactly parallel to those made by CARTAN [9]. First of all, the assumption

$$Dg_{ij} = 0 \tag{4.6}$$

leads to equations corresponding to (3.21) and (3.22).

If we assume the symmetry of the C^k_{ij} in the first two indices, and write

$$A^k_{ij} = L\,C^k_{ij} = \frac{1}{2} L \frac{\partial g_{ij}}{\partial p_k}, \qquad \omega_h = Dl_h$$

the (4.5) may be rewritten as

$$DV^i = dV^i + \overset{*}{\Gamma}{}^i_{jh} V^j (dx)^h + A^{ih}_j V^j \omega_h \tag{4.7}$$

with

$$\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jh} = \Gamma^i_{jh} + A^{ir}_j \Gamma_{r0h}. \tag{4.8}$$

The symmetry of $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jh}$ and the equations (4.6) suffice to determine the Γ^i_{jh}. To prove this let us introduce the generalized symbols of CHRISTOFFEL

$$\gamma_{ijh} = \tfrac{1}{2}\{X_h g_{ij} + X_i g_{jh} - X_j g_{ih}\} \tag{4.9}$$

which satisfy

$$\gamma_{ijh} - \gamma_{hji} = 0 \tag{4.10}$$

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{jih} = X_h g_{ij}. \tag{4.11}$$

The corresponding equations for the Γ are

$$\overset{*}{\Gamma}_{ijh} - \overset{*}{\Gamma}_{hji} = 0 \tag{4.12}$$

$$\Gamma_{ijh} + \Gamma_{jih} = X_h g_{ij}. \tag{4.13}$$

The (4.12) may be rewritten

$$\Gamma_{ijh} - \Gamma_{hji} = A^r_{hj}\,\Gamma_{r0i} - A^r_{ij}\,\Gamma_{r0h}. \tag{4.14}$$

If we put

$$\Gamma_{ijh} = \gamma_{ijh} + S_{ijh} \tag{4.15}$$

the S_{ijh} will be a contact tensor, and it will follow from (4.11) and (4.13) that

$$S_{ijh} + S_{jih} = 0. \tag{4.16}$$

Hence from (4.14) we have

$$S_{ijh} - S_{hji} = A^r_{hj}\,\Gamma_{r0i} - A^r_{ij}\,\Gamma_{r0h} \tag{4.17}$$

so that using (4.16) we get

$$S_{ijh} + S_{jhi} = A^r_{hj}\,\Gamma_{r0i} - A^r_{ij}\,\Gamma_{r0h}. \tag{4.18}$$

By writing two similar expressions by cyclic interchange of the letters i, j, h we get

$$S_{ijh} + S_{jhi} + S_{hij} = 0 \tag{4.19}$$

so that using (4.18) gives

$$\begin{cases} S_{ihj} = A^r_{hj}\,\Gamma_{r0i} - A^r_{ij}\,\Gamma_{r0h} \\ \qquad = A^r_{hj}(\gamma_{r0i} + S_{r0i}) - A^r_{ij}(\gamma_{r0h} + S_{r0h}). \end{cases} \tag{4.20}$$

Contracting with the unit vector we have

$$S_{ih0} = 0, \qquad S_{i0j} = -A^r_{ij}\gamma_{r00} \tag{4.21}$$

so that we get immediately

$$S_{ihj} = A^r_{hj}(\gamma_{r0i} - A^q_{ri}\gamma_{q00}) - A^r_{ij}(\gamma_{r0h} - A^q_{rh}\gamma_{q00}). \tag{4.22}$$

It follows that Γ_{ijh} is expressible entirely in terms of the X_h and X^h derivatives of g. In this notation the Γ_{ijh} occurring in (3.41) should be written $\overset{*}{\Gamma}_{ijh}$. The expression for $\overset{*}{\Gamma}_{ijh}$ becomes identical with the right hand side of (3.41). The results of this paragraph however constitute a generalization because the derivatives occurring in (3.41) are ordinary derivatives, and here they are X_h and X^h operators.

References.

[1] Eisenhart, L. P., and M. S. Knebelman: Invariant theory of homogeneous contact transformations. Ann. of Math. **37**, 747—765 (1936). — [2] Schouten, J. A.: Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen. Proc. Akad. Amsterdam **40**, 100—107, 236—245, 470—480 (1937). — [3] Doyle, T. C.: Tensor decomposition with applications to the contact and complex groups. Ann. of Math. **42**, 698—721 (1941). — [4] Muto, Y., and K. Yano: Sur les transformations de contact et les espaces de Finsler. Tohoku Math. J. **45**, 295—307 (1939). — [5] Vranceanu, G.: Studio geometrica dei sistemi anolonomi. Ann. Mat. pura appl., VI. ser. **4**, 9—43 (1928). — [6] Schouten, J. A., u. E. R. van Kampen: Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nicht holonomer Gebilde. Math. Ann. **103**, 752—783 (1930). — [7] Dienes, P.: On the fundamental formulae of the geometry of tensor submanifolds. J. Math. pures appl., IX. ser. **2**, 255—282 (1932). — [8] Davies, E. T.: On metric spaces based on a vector density. Proc. London Math. Soc., II. ser. **49**, 241—259 (1947). — [9] Cartan, E.: Les espaces de Finsler. Actual. sci. industr. **79** (1934).

Math. Dept., University, Southampton (England).

(Eingegangen am 18. September 1952.)

FORSTER, H.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 428—455 (1953)

Über eine Randwertaufgabe der Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = r^2 k \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Von

HERBERT FORSTER.

Kap. I. Die Ergebnisse.

§ 1. Vorbemerkung.

Wenn man die Temperaturverhältnisse in einem sonnenbeschienenen, langen, zylindrischen Baumstamm berechnen will und dabei Zylinderkoordinaten einführt, erhält man die Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = r^2 \cdot k \cdot \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{1}$$

Dabei bedeutet t die Zeit, $f(r;\varphi;t)$ die Übertemperatur über das Temperaturminimum, und es ist

$$q^2 = \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_r} \quad \text{und} \quad k = \frac{\varkappa}{\lambda_r},$$

wobei λ_φ die Wärmeleitzahl in Richtung der Kreislinien $r = \text{const}$, $z = \text{const}$ und λ_r die Wärmeleitzahl in radialer Richtung bedeutet; wegen des Einflusses der Jahresringe und der Markstrahlen sind beide voneinander verschieden. $\varkappa$ ist die Wärmekapazität der Volumeneinheit. Die Gl. (1) unterscheidet sich von der Wärmeleitungsgleichung für homogene zylindrische Körper [6, S. 106] durch den Faktor q^2, der verursacht, daß sich die linke Seite nicht in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ überführen läßt. [Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.]

Die Randbedingung, die in dem an der Oberfläche herrschenden Gleichgewicht von Wärmeeinstrahlung, Wärmeausstrahlung, Wärmeabgabe an die Luft und Wärmeableitung ins Innere des Baums besteht, läßt sich auf die Form bringen

$$\zeta \cdot f + \frac{\partial f}{\partial r} = S(\varphi;t) \quad \text{für} \quad r = R. \tag{2}$$

Dabei ist ζ eine Konstante, $S(\varphi;t)$ eine Funktion von φ und t, die periodisch in φ ist, und R der Radius des Zylinders. Da sich die Sonneneinstrahlung und die Temperaturen nur langsam ändern, so ändern sich S und f nur wenig mit t und vor allem der Ausdruck $k \cdot \frac{\partial f}{\partial t}$, der von der Wahl der Zeiteinheit nicht abhängt, bleibt immer klein. Es liegt deshalb die Annahme nahe, daß sich die Funktion $f(r;\varphi;t)$ nur wenig von der Funktion $g(r;\varphi;t)$ unter-

scheidet, die die Lösung der beiden Gleichungen ist:

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0; \tag{3}$$

$$\zeta g + \frac{\partial g}{\partial r} = S(\varphi; t) \quad \text{für} \quad r = R. \tag{4}$$

Deshalb wurde die Lösung von (1), (2) in der Form

$$f(r; \varphi; t) = g(r; \varphi; t) + \delta(r; \varphi; t) \tag{5}$$

entwickelt, wobei dann $|\delta(r; \varphi; t)|$ klein ist, wenn k klein ist und $S(\varphi; t)$ sich nur langsam mit t ändert; während man normalerweise $f(r; \varphi; t)$ in Form einer Doppelreihe $\sum_n \sum_m a_{n,m} J_n(\lambda_{n,m} r)\, e^{in\varphi} \cdot e^{-\lambda_{n,m}^2 kt}$ anzusetzen pflegt [6, S. 106].

Diese Entwicklung (5) soll im folgenden mitgeteilt werden, wobei wir die Frage rein mathematisch behandeln wollen, ohne auf ihren physikalischen Hintergrund Bezug zu nehmen. Es sollen zwei Fälle ins Auge gefaßt werden:

I. daß für $t \leq t_0$ sowohl $f = 0$ als auch $S = 0$ ist (Kap. II),

II. daß $S(\varphi; t)$ auch in t periodisch ist (Kap. IV).

§ 2. Bezeichnungen und Abkürzungen.

Wir führen im folgenden einige Abkürzungen und Bezeichnungen ein. Die Konvergenz bzw. Existenz der dabei vorkommenden Reihenentwicklungen und die dazu nötigen Voraussetzungen werden später behandelt. Wir setzen:

$$\frac{\partial S(\varphi; t)}{\partial t} = H(\varphi; t); \tag{6}$$

$$H(\varphi; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n'(t) \cos n\varphi + B_n'(t) \cdot \sin n\varphi\right); \tag{7}$$

$$S(\varphi; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n(t) \cos n\varphi + B_n(t) \sin n\varphi\right); \tag{8}$$

$$\vartheta_n = \zeta + \frac{q\, n}{R} \qquad (q > 0;\ n = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Die positiven Wurzeln der Gleichung

$$J_\nu(x) = 0 \quad (\nu \geq 0), \tag{10}$$

wobei $J_\nu(x)$ die Besselsche Funktion darstellt, bezeichnen wir, nach wachsender Größe geordnet, mit $x_1(\nu)$, $x_2(\nu)$ ...; da für $\nu > 0$ auch $J_\nu(0) = 0$ ist, sei $x_0(\nu) = 0$ für $\nu > 0$. Die positiven Wurzeln der Gleichung

$$J_\nu'(x) = 0 \quad (\nu \geq 0) \tag{11}$$

bezeichnen wir, nach wachsender Größe geordnet, mit $X_1(\nu), X_2(\nu), \ldots$. Die Gleichung

$$\zeta R \cdot J_\nu(x) + x \cdot J_\nu'(x) = 0 \quad (\nu \geq 0) \tag{12}$$

hat, wenn $\zeta R > -\nu$ ist, keine rein imaginären Wurzeln (Hilfssatz I, § 10). In diesem Fall bezeichnen wir die positiven Wurzeln, nach wachsender Größe geordnet, mit $\Lambda_1(\nu), \Lambda_2(\nu), \ldots$. Wenn $\zeta R < -\nu$ ist, hat (12) ein Paar rein

imaginärer Wurzeln; wir bezeichnen sie mit $\pm \Lambda_1(\nu)$ und die positiven Wurzeln bezeichnen wir, der Größe nach geordnet, mit $\Lambda_2(\nu), \Lambda_3(\nu) \ldots$. Wir setzen

$$\sigma_{n\mu} = \frac{\Lambda_\mu^2 (q\,n)}{k\,R^2}, \tag{13}$$

$$C_{n\mu} = J_{q\,n}\left(\Lambda_\mu (q\,n)\right) \cdot \left(\Lambda_\mu^2 (q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2\right). \tag{14}$$

Im Falle II, wenn also $S(\varphi; t)$ auch eine periodische Funktion von t ist, setzen wir (8)

$$\begin{cases} A_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\alpha_{n\,m} \cos(m\,\omega\,t) + \beta_{n\,m} \sin(m\,\omega\,t)\right); \\ B_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\gamma_{n\,m} \cos(m\,\omega\,t) + \delta_{n\,m} \sin(m\,\omega\,t)\right). \end{cases} \tag{15}$$

Ferner bilden wir die Funktionen:

$$\begin{cases} A_{n\mu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\,\omega}{m^2\omega^2 + \sigma_{n\mu}^2} \times \\ \times \left[(m\,\omega\,\alpha_{n\,m} + \sigma_{n\mu}\beta_{n\,m}) \cos(m\,\omega\,t) + (m\,\omega\,\beta_{n\,m} - \sigma_{n\mu}\alpha_{n\,m}) \sin(m\,\omega\,t)\right]; \\ B_{n\mu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\,\omega}{m^2\omega^2 + \sigma_{n\mu}^2} \times \\ \times \left[(m\,\omega\,\gamma_{n\,m} + \sigma_{n\mu}\delta_{n\,m}) \cos(m\,\omega\,t) + (m\,\omega\,\delta_{n\,m} - \sigma_{n\mu}\cdot\gamma_{n\,m}) \sin(m\,\omega\,t)\right]. \end{cases} \tag{16}$$

§ 3. Die Ergebnisse.

I. (17) Wir setzen von $\frac{\partial S(\varphi; t)}{\partial t} = H(\varphi; t)$ voraus, daß es für $t \geqq t_0$ eine stetige und beschränkte Funktion von φ und t und eine periodische Funktion von φ mit der Periode 2π ist. Ferner sollen $\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial \varphi}$, $\frac{\partial^3 S}{\partial t\,\partial \varphi^2}$ und $\frac{\partial^4 S}{\partial t\,\partial \varphi^3}$ existieren und beschränkt sein; $\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial \varphi}$ soll außerdem stetig sein, während $\frac{\partial^3 S}{\partial t\,\partial \varphi^2}$ und $\frac{\partial^4 S}{\partial t\,\partial \varphi^3}$ als Funktionen von φ endlich viele Sprungstellen haben dürfen.

(18) Für $t \leqq t_0$ soll $S(\varphi; t) = 0$ sein.

Bezüglich R, ζ und q setzen wir voraus, daß

$$\vartheta_n = \zeta + \frac{q\,n}{R} \neq 0 \quad \text{für} \quad n = 0; 1; 2; \ldots \tag{19}$$

ist. Die Funktion $f(r; \varphi; t)$ soll die Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = r^2 \cdot k \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \tag{20}$$

lösen und folgende Randbedingungen erfüllen:

$$\begin{cases} 1.\ \text{für } t \leqq t_0 \text{ soll } f(r; \varphi; t) = 0 \text{ sein}; \\ 2.\ \text{für } t > t_0 \text{ und } r = 0 \text{ soll } f(0; \varphi; t) \text{ endlich und } \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \text{ sein}; \\ 3.\ \text{für } t > t_0 \text{ und } r = R \text{ soll } \zeta \cdot f + \frac{\partial f}{\partial r} = S(\varphi; t) \text{ sein}. \end{cases} \tag{21}$$

Unter obigen Voraussetzungen ist

$$(22)\quad \begin{cases} f(r;\varphi;t) = g(r;\varphi;t) + \delta(r;\varphi;t) \\ \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\vartheta_n} \left(\frac{r}{R}\right)^{q_n} \left(A_n(t)\cos n\varphi + B_n(t)\sin n\varphi\right) \\ \qquad - 2R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{J_{q_n}\left(\frac{r}{R} \Lambda_\mu(q_n)\right)}{C_{n\mu}} \times \\ \qquad \times \left\{\cos n\varphi \cdot \int_{t_0}^{t} A_n'(\tau)\, e^{-(t-\tau)\sigma_{n\mu}}\, d\tau + \sin n\varphi \cdot \int_{t_0}^{t} B_n'(\tau) \cdot e^{-(t-\tau)\sigma_{n\mu}}\, d\tau\right\} \end{cases}$$

für $t \geqq t_0$ *und* $f(r;\varphi;t) = 0$ *für* $t \leqq t_0$ *eine Lösung von* (20) *unter den Randbedingungen* (21). (Über die Bedeutung von $A_n(t)$, $B_n(t)$ vgl. (8))

$\delta(r;\varphi;t)$ *ist also durch* $-2R \sum\sum \ldots$ *gegeben.*

II. Von $S(\varphi;t)$ setzen wir jetzt voraus, daß es eine in φ und t stetige und in φ und t periodische Funktion mit der Periode 2π bzw. $\frac{2\pi}{\omega}$ ist. Es sollen ferner die Ableitungen $\frac{\partial S}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial \varphi}$, $\frac{\partial^3 S}{\partial t\, \partial \varphi^2}$, $\frac{\partial^4 S}{\partial t^2\, \partial \varphi^2}$, $\frac{\partial^5 S}{\partial t^2\, \partial \varphi^3}$ und $\frac{\partial^6 S}{\partial t^3\, \partial \varphi^3}$ existieren, stetig und beschränkt sein. Statt (19) soll hier gelten: $\zeta R > 0$.

Die Funktion $f(r;\varphi;t)$ soll eine Lösung von (1) mit folgenden Randbedingungen sein:

$$(23)\quad \begin{cases} \text{1. für } r = 0 \text{ soll } f(0;\varphi;t) \text{ endlich und } \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \text{ sein;} \\ \text{2. für } r = R \text{ soll } \zeta f + \frac{\partial f}{\partial r} = S(\varphi;t) \text{ sein.} \end{cases}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$(24)\quad \begin{cases} f(r;\varphi;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\vartheta_n} \left(\frac{r}{R}\right)^{q_n} \left(A_n(t)\cos n\varphi + B_n(t)\cdot \sin n\varphi\right) \\ \qquad - 2R \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{J_{q_n}\left(\frac{r}{R} \cdot \Lambda_\mu(q_n)\right)}{C_{n\mu}} \{\cos n\varphi \cdot A_{n\mu}(t) + \sin n\varphi \cdot B_{n\mu}(t)\} \end{cases}$$

eine Lösung von (1) *mit den Randbedingungen* (23).

III. Im Laufe der Arbeit (§§ 10—12) werden einige Hilfssätze über die Lösungen $\Lambda_\mu(\nu)$ der Gleichung

$$(12a)\qquad \alpha \cdot J_\nu(x) + x \cdot J_\nu'(x) = 0 \qquad (\nu \geqq 0;\ \alpha \neq -\nu)$$

und die Werte $J_\nu(\Lambda_\mu(\nu))$ bewiesen werden, die wohl auch sonst von Interesse sind; es möge hier genügen, auf sie zu verweisen [S. 441, S. 444, S. 447 und die Ungleichungen (119), (120)].

Kap. II. Für $t \leqq t_0$ soll $S(\varphi; t) = f(r; \varphi; t) = 0$ sein.

In diesem Kapitel soll unter den Voraussetzungen (17), (18) und (19) eine Lösung der Differentialgleichung (20) mit den Randbedingungen (21) entwickelt werden. Das Ergebnis ist (22).

§ 4. Der Gedankengang der Lösung.

Es soll zunächst der Gedankengang der Lösung dargestellt werden. Die Durchführung der einzelnen Schritte und der Beweis wird dann in den folgenden Paragraphen nachgetragen.

I. Wir denken uns $f(r; \varphi; t)$ durch Superposition von Funktionen $F(r; \varphi; t; \tau)$ aufgebaut in der Form

$$f(r; \varphi; t) = \int_{t_0}^{t} F(r; \varphi; t; \tau)\, d\tau. \tag{25}$$

Dabei fordern wir von $F(r; \varphi; t; \tau)$, daß es eine Lösung von

$$r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + r \frac{\partial F}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = r^2 \cdot k \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \tag{26}$$

ist und folgende Randbedingungen erfüllt:

1. für $t \leqq \tau$ soll

$$F(r; \varphi; t; \tau) = 0, \text{ speziell } F(r; \varphi; t; t) = 0 \text{ sein;} \tag{27}$$

2. für $t > \tau$ soll

$$\begin{cases} \text{für } r = R \quad \zeta F + \dfrac{\partial F}{\partial r} = H(\varphi; \tau) \quad \text{und} \\ \text{für } r = 0 \quad F \text{ endlich und } \dfrac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \text{ sein.} \end{cases} \tag{28}$$

Dann ist (25) eine Lösung von (20) und (21).

II. $G(r; \varphi; \tau)$ sei die Lösung der Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + r \frac{\partial G}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{29}$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{cases} 1.\ \text{Für } r = R \text{ soll } \zeta G + \dfrac{\partial G}{\partial r} = H(\varphi; \tau) \text{ und} \\ 2.\ \text{für } r = 0 \text{ soll } G \text{ endlich und } \dfrac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \text{ sein.} \end{cases} \tag{30}$$

Die Funktion

$$g(r; \varphi; t) = \int_{t_0}^{t} G(r; \varphi; \tau)\, d\tau \tag{31a}$$

erfüllt dann wegen (6) und (18) die Gleichungen

$$\begin{cases} \text{a)} \quad r^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \dfrac{\partial g}{\partial r} + q^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0, \\ \text{b)} \quad \zeta g + \dfrac{\partial g}{\partial r} = S(\varphi; t) \quad \text{für } r = R \quad \text{und} \\ \text{c)} \quad \dfrac{\partial g}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{und } g \text{ endlich für } \quad r = 0. \end{cases} \tag{31b}$$

Wir nennen sie „die zu $f(r; \varphi; t)$ gehörige stationäre Lösung".

III. Setzt man nun

$$F(r;\varphi;t;\tau) = G(r;\varphi;\tau) - \Delta(r;\varphi;t;\tau), \tag{32}$$

so erhält man für Δ aus (26) und (29) die Gleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + r \frac{\partial \Delta}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \varphi^2} = k \cdot r^2 \frac{\partial \Delta}{\partial t} \tag{33}$$

und aus (27), (28) und (30) die Randbedingungen:

1. für $t \leq \tau$ soll

$$\begin{cases} \Delta(r;\varphi;t;\tau) = G(r;\varphi;\tau) & \text{(von } t \text{ unabhängig!)}, \\ \text{speziell} \quad \Delta(r;\varphi;\tau;\tau) = G(r;\varphi;\tau) & \text{sein}, \end{cases} \tag{34}$$

2. für $t > \tau$ soll

$$\text{an } r = R \qquad \zeta \cdot \Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial r} = \mathbf{0} \qquad \text{und} \tag{35}$$

$$\text{an } r = 0 \qquad \Delta \text{ endlich und } \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} = 0 \text{ sein.} \tag{36}$$

Die Randbedingungen (35) und (36) sind nun *homogen* geworden.

Setzen wir nun (32) in (25) ein und berücksichtigen wir (31a), so erhalten wir:

$$\begin{cases} f(r;\varphi;t) = \int_{t_0}^{t} G(r;\varphi;\tau)\, d\tau - \int_{t_0}^{t} \Delta(r;\varphi;t;\tau)\, d\tau \\ \qquad\qquad = g(r;\varphi;t) - \int_{t_0}^{t} \Delta(r;\varphi;t;\tau)\, d\tau. \end{cases} \tag{37}$$

Es ist also der gesuchte (5) Unterschied zwischen $f(r;q;t)$ und $g(r;\varphi;t)$ gegeben durch

$$\delta(r;\varphi;t) = -\int_{t_0}^{t} \Delta(r;\varphi;t;\tau)\, d\tau. \tag{38}$$

Es sei bemerkt, daß von den Randbedingungen (34) nur die für $t = \tau$ zur Geltung kommt, da ja $\tau \leq t$ ist.

§ 5. Die stationäre Lösung.

Nach den Voraussetzungen (17) läßt sich $S(\varphi;t)$ in eine Fourriersche Reihe nach φ entwickeln

$$S(\varphi;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n(t) \cos n\varphi + B_n(t) \sin n\varphi\right).$$

Außerdem dürfen wir gliedweise nach t differenzieren. Dann wird:

$$H(\varphi;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n'(t) \cdot \cos n\varphi + B_n'(t) \sin n\varphi\right),$$

wobei $A_n'(t)$ und $B_n'(t)$ stetig und beschränkt sind.

Die Lösung von (29) und (30) erhält man dann in bekannter Weise [2; S. 272], indem man

$$G(r;\varphi;\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{qn} \left(\alpha_n(\tau)\cos n\varphi + \beta_n(\tau)\cdot\sin n\varphi\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{-qn} \left(\gamma_n(\tau)\cdot\cos n\varphi + \delta_n(\tau)\cdot\sin n\varphi\right)$$

setzt. $\alpha_n(\tau)$, $\beta_n(\tau)$, $\gamma_n(\tau)$ und $\delta_n(\tau)$ erhält man aus den Randbedingungen (30).

$$(30;2)\text{ ergibt: } \gamma_n = \delta_n = 0;$$

$$(30;1)\text{ ergibt: } \alpha_n(\tau)\left(\zeta + \frac{qn}{R}\right) = A_n'(\tau);$$

$$\beta_n(\tau)\cdot\left(\zeta + \frac{qn}{R}\right) = B_n'(\tau).$$

Unter Verwendung der Abkürzung (9) erhält man:

$$(39)\qquad G(r;\varphi;\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn}\left(A_n'(\tau)\cdot\cos n\varphi + B_n'(\tau)\cdot\sin n\varphi\right).$$

Analog erhält man als Lösung von (31b):

$$(40)\qquad g(r;\varphi;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn}\left(A_n(t)\cos n\varphi + B_n(t)\sin n\varphi\right).$$

§ 6. Die Funktion $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$.

Wir machen für $t \geq \tau$ den Ansatz

$$(41)\qquad \Delta(r;\varphi;t;\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\Gamma_n(r;t;\tau)\cos n\varphi + E_n(r;t;\tau)\cdot\sin n\varphi\right)$$

mit

$$(42)\qquad \begin{cases} \Gamma_n(r;t;\tau) = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} h_{n\mu}(r)\, e^{-\sigma_{n\mu}(t-\tau)}, \\ E_n(r;t;\tau) = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} l_{n\mu}(r)\, e^{-\varrho_{n\mu}(t-\tau)}. \end{cases}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (33) für $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$ ein, so erhalten wir für $h_{n\mu}(r)$ und $l_{n\mu}(r)$ die Gleichungen:

$$(43)\qquad \begin{cases} r^2\frac{d^2h}{dr^2} + r\frac{dh}{dr} - (qn)^2 h + \sigma_{n\mu} k r^2 h = 0; \\ r^2\frac{d^2l}{dr^2} + r\frac{dl}{dr} - (qn)^2 l + \varrho_{n\mu} k r^2 l = 0. \end{cases}$$

Da die Funktionen für $r = 0$ endlich sein sollen (36), lauten die Lösungen [2; S. 261]:

$$(44)\qquad h_{n\mu}(r) = c_{n\mu}\cdot J_{qn}\left(r\sqrt{\sigma_{n\mu}k}\right); \qquad l_{n\mu}(r) = e_{n\mu}\cdot J_{qn}\left(r\sqrt{\varrho_{n\mu}k}\right).$$

Dabei bedeutet $J_{qn}(x)$ die BESSELsche Funktion mit dem Index qn.

Die Konstanten $\sigma_{n\mu}$, $\varrho_{n\mu}$, $c_{n\mu}$, $e_{n\mu}$ werden nun aus den Grenzbedingungen bestimmt:

A. Aus der Bedingung (35) erhalten wir:

$$\left\{\begin{array}{l} \zeta J_{qn}\left(R\sqrt{\sigma_{n\mu}k}\right)+\frac{d}{dr}J_{qn}\left(r\sqrt{\sigma_{n\mu}k}\right)_{r=R}=0; \\ \zeta J_{qn}\left(R\cdot\sqrt{\varrho_{n\mu}k}\right)+\frac{d}{dr}J_{qn}\left(r\sqrt{\varrho_{n\mu}k}\right)_{r=R}=0. \end{array}\right. \tag{45}$$

Dies sind Bestimmungsgleichungen für $\varrho_{n\mu}$ und $\sigma_{n\mu}$. Da sie für beide gleich lauten, können wir $\varrho_{n\mu}=\sigma_{n\mu}$ setzen. Wir wollen die Bestimmungsgleichung (45) für $\sigma_{n\mu}$ noch etwas umformen und setzen

$$\Lambda_\mu(qn)=R\cdot\sqrt{\sigma_{n\mu}k}. \tag{46a}$$

Dann wird

$$J_{qn}\left(r\sqrt{\sigma_{n\mu}k}\right)=J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right) \tag{46b}$$

und (45) erhält die Form:

$$R\zeta\cdot J_{qn}\left(\Lambda_\mu(qn)\right)+\Lambda_\mu(qn)\,J'_{qn}\left(\Lambda_\mu(qn)\right)=0. \tag{47}$$

Dies ist die Gl. (12), wenn man $\nu=qn$ setzt.

Es liegt hier eine Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe vor. Sie ergibt sich in ihrer geläufigen Form [*1*; S. 158], wenn wir

$$\lambda_{n\mu}=\sigma_{n\mu}k=\varrho_{n\mu}k, \quad \text{also} \quad \Lambda^2_\mu(qn)=\lambda_{n\mu}\cdot R^2 \tag{48}$$

setzen, und lautet dann:

„Die Differentialgleichung

$$r\frac{d^2h}{dr^2}+\frac{dh}{dr}-\frac{(qn)^2}{r}h+\lambda r h=0 \tag{49a}$$

ist so zu lösen, daß

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{für} \quad r=R & \zeta h+\frac{dh}{dr}=0 & \text{und} \\ \text{für} \quad r=0 & h(0)=0 & \text{bzw. im Falle} \\ & n=0 & h(0) \text{ endlich ist.}" \end{array}\right. \tag{49b}$$

Im Falle $\lambda=0$ existiert keine Lösung; denn das allgemeine Integral lautet dann $c_1 r^{qn}+c_2 r^{-qn}$ und erfüllt nicht beide Randbedingungen (49b) gleichzeitig, da nach (19) $\zeta R+qn\neq 0$ ist. Da für $\lambda=0$ keine Lösung existiert, gibt es eine Greensche Funktion [*2*; S. 306]. Davon werden wir später Gebrauch machen.

Fassen wir nun (41) bis (44) zusammen, so erhält $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$ für $t\geqq\tau$ die Form:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta(r;\varphi;t;\tau)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big\{\cos n\varphi\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}c_{n\mu}J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right)e^{-(t-\tau)\sigma_{n\mu}} \\ \qquad\qquad +\sin n\varphi\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}e_{n\mu}J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right)e^{-(t-\tau)\sigma_{n\mu}}\Big\}. \end{array}\right. \tag{50}$$

B. Die Koeffizienten $c_{n\mu}$ und $e_{n\mu}$ in (50) bestimmen wir aus der Randbedingung (34). Wir erhalten aus ihr für $t=\tau$:

$$(51)\quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\cos n\varphi \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right) c_{n\mu} + \sin n\varphi \sum_{\mu=1}^{\infty} e_{n\mu} J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right)\right] \\ \qquad = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\cos n\varphi \cdot \frac{A_n'(\tau)}{\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn} + \sin n\varphi \cdot \frac{B_n'(\tau)}{\vartheta_n}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{qn}\right]. \end{cases}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\frac{A_n'(\tau)}{\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{n\mu} J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right),$$

$$\frac{B_n'(\tau)}{\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = \sum_{\mu=1}^{\infty} e_{n\mu} J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right),$$

Hieraus folgt, daß wir $(r/R)^{qn}$ nach den Eigenfunktionen $J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right)$ zu entwickeln haben:

$$(52a)\quad \left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \eta_{n\mu}\cdot J_{qn}\left(\Lambda_\mu(qn)\cdot\frac{r}{R}\right).$$

Dann ist

$$(52b)\quad c_{n\mu} = \eta_{n\mu}\cdot\frac{A_n'(\tau)}{\vartheta_n} \quad \text{und} \quad e_{n\mu} = \eta_{n\mu}\cdot\frac{B_n'(\tau)}{\vartheta_n}.$$

§ 7. Die Entwicklung $\left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \eta_{n\mu}\cdot J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)$.

A. Wir stellen zunächst die GREENsche Funktion $G(r;\varrho)$ für unsere Randwertaufgabe (49a, b) auf. $G(r;\varrho)$ hat folgende Bedingungen zu erfüllen [2; S. 304].

1. Es muß bei festem ϱ eine stetige Funktion von r sein und die Randbedingungen (49b) erfüllen.

2. Die Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach r müssen überall außer für $r=\varrho$ stetig sein; an der Stelle $r=\varrho$ muß

$$\left(\frac{\partial G(r;\varrho)}{\partial r}\right)_{r=\varrho+0} - \left(\frac{\partial G(r;\varrho)}{\partial r}\right)_{r=\varrho-0} = -\frac{1}{\varrho} \quad \text{sein.}$$

3. Außer für $r=\varrho$ muß im ganzen Bereich $0\le r\le R$

$$r\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{(qn)^2}{r}\cdot G = 0 \quad \text{sein.}$$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich

$$(53)\quad G_n(r;\varrho) = \begin{cases} \frac{1}{2qn}\cdot\left[\frac{\delta_n}{\vartheta_n}\left(\frac{r\varrho}{R^2}\right)^{qn} + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{qn}\right] & \text{für } 0\le r\le\varrho\le R, \\ \frac{1}{2qn}\cdot\left[\frac{\delta_n}{\vartheta_n}\left(\frac{r\varrho}{R^2}\right)^{qn} + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{qn}\right] & \text{für } 0\le\varrho\le r\le R; \end{cases}$$

dabei ist

$$(54)\quad \delta_n = \frac{qn}{R} - \zeta; \qquad \vartheta_n = \frac{qn}{R} + \zeta; \qquad n>0.$$

B. Da in (49a) bei $\lambda \cdot h$ der Faktor r steht, stellt

$$K_n(r;\varrho) = \sqrt{r\,\varrho}\cdot G_n(r;\varrho) \tag{55}$$

den Kern der Integralgleichung dar, die unserer STURM-LIOUVILLEschen Randwertaufgabe (49a, b) entspricht [2; S. 309]. Die Integralgleichung lautet

$$v(r) = \lambda \cdot \int_0^R K_n(r;\varrho)\cdot v(\varrho)\,d\varrho\,. \tag{56}$$

Zwischen der Lösung $v(r)$ von (56) und der Lösung $h(r)$ von (49) besteht die Beziehung

$$v(r) = \sqrt{r}\cdot h(r)\,.$$

Die Eigenwerte der Integralgleichung sind unsere $\lambda_{n\mu}$ und die normierten Eigenfunktionen sind

$$\varphi_{n\mu}(r) = \sqrt{r}\cdot J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right)\cdot\tau_{n\mu};\quad \text{dabei ist} \tag{57}$$

$$\frac{1}{\tau_{n\mu}^2} = \int_0^R r\,J_{qn}^2\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right)dr\,. \tag{58}$$

Nach dem Hilfssatz I, § 10 und (48) sind die Eigenwerte $\lambda_{n\mu}$ $(\mu = 1; 2; \ldots)$ entweder alle positiv, oder nur ein einziger ist negativ und die anderen sind alle positiv; dann ist nach einem Satz von MERCER [2; S. 117]

$$K_n(r;\varrho) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\varphi_{n\mu}(r)\cdot\varphi_{n\mu}(\varrho)}{\lambda_{n\mu}}; \tag{59}$$

und zwar konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig für $0\leqq r\leqq R$ und $0\leqq\varrho\leqq R$.

Wir setzen in (59) speziell $\varrho = R$ ein, dann ersetzen wir $K_n(r;R)$ nach (55) durch $\sqrt{rR}\,G(r;R)$ und verwenden (53); die rechte Seite von (59) formen wir mittels (57) um. So erhalten wir, wenn wir die entstandene Gleichung noch durch $\sqrt{rR}$ dividieren:

$$\frac{1}{R\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right)\cdot\frac{J_{qn}\left(R\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right)\cdot\tau_{n\mu}^2}{\lambda_{n\mu}}\,. \tag{60}$$

Für $n = 0$ zeigt man die Gültigkeit von (60), indem man die Gleichung mit $r\cdot J_0\left(r\sqrt{\lambda_{0\mu}}\right)$ multipliziert und von 0 bis R integriert.

§ 8. Die Berechnung von $\frac{1}{\tau_{n\mu}^2} = \int_0^R r\,J_{qn}^2\left(r\,|\,\lambda_{n\mu}\right)dr\,.$

Das folgende Verfahren ist BIEBERBACH nachgebildet [1; S. 187]. λ sei ein beliebiger, nicht verschwindender, reeller Wert des Parameters, braucht also zunächst noch kein Eigenwert zu sein. Wir setzen:

$$\sqrt{r}\cdot J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda}\right) = \psi_{n,\lambda}(r) = \lambda^{\frac{qn}{2}}\cdot r^{qn+\frac{1}{2}}\cdot\Phi_{qn}\left(r\sqrt{\lambda}\right),\ \text{wobei} \tag{61}$$

$$\Phi_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\ \text{ist.} \tag{62}$$

Dann gilt für $\psi_{n,\lambda}(r)$ die Differentialgleichung:

$$\psi''_{n,\lambda}(r) + \psi_{n,\lambda}(r) \cdot \left(\lambda - \frac{4(qn)^2 - 1}{4r^2}\right) = 0. \tag{63}$$

Ebenso für $\psi_{n,\lambda+\delta}(r)$:

$$\psi''_{n,\lambda+\delta} + \psi_{n,\lambda+\delta} \cdot \left(\lambda + \delta - \frac{4(qn)^2 - 1}{4r^2}\right) = 0. \tag{64}$$

Wir multiplizieren (63) mit $\psi_{n,\lambda+\delta}$ und (64) mit $\psi_{n,\lambda}$, subtrahieren dann die erstere von der zweiten und integrieren nach r von ε bis R, wobei ε klein aber positiv sein soll. Dann ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} \delta \cdot \int_{\varepsilon}^{R} \psi_{n,\lambda+\delta} \cdot \psi_{n,\lambda}\, dr &= -\int_{\varepsilon}^{R} (\psi''_{n,\lambda+\delta}\psi_{n,\lambda} - \psi''_{n,\lambda} \cdot \psi_{n,\lambda+\delta})\, dr \\ &= [\psi'_{n,\lambda} \cdot \psi_{n,\lambda+\delta} - \psi_{n,\lambda} \cdot \psi'_{n,\lambda+\delta}]_{\varepsilon}^{R} = \Psi(R) - \Psi(\varepsilon). \end{aligned}\right. \tag{65}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon) &= [\psi'_{n,\lambda} \cdot \psi_{n,\lambda+\delta} - \psi_{n,\lambda} \cdot \psi'_{n,\lambda+\delta}]_{r=\varepsilon} \\ &= \Big[\Big(\lambda^{\frac{qn+1}{2}} r^{qn+\frac{1}{2}} \cdot \Phi'_{qn}\big(r\sqrt{\lambda}\big) + \big(qn + \tfrac{1}{2}\big) \cdot r^{qn-\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{\frac{qn}{2}} \cdot \Phi_{qn}\big(r\sqrt{\lambda}\big)\Big) \times \\ &\quad \times (\lambda+\delta)^{\frac{qn}{2}} r^{qn+\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{qn}\big(r\sqrt{\lambda+\delta}\big) \\ &\quad - \lambda^{\frac{qn}{2}} \cdot r^{qn+\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{qn}\big(r\sqrt{\lambda}\big) \cdot \Big((\lambda+\delta)^{\frac{qn+1}{2}} r^{qn+\frac{1}{2}} \cdot \Phi'_{qn}\big(r\sqrt{\lambda+\delta}\big) + \\ &\quad + \big(qn + \tfrac{1}{2}\big) \cdot r^{qn-\frac{1}{2}} (\lambda+\delta)^{\frac{qn}{2}} \cdot \Phi_{qn}\big(r\sqrt{\lambda+\delta}\big)\Big)\Big]_{r=\varepsilon} \\ &= \lambda^{\frac{qn}{2}} (\lambda+\delta)^{\frac{qn}{2}} \cdot \varepsilon^{2qn+1} \times \\ &\quad \times \Big(\lambda^{\frac{1}{2}} \Phi'_{qn}\big(\varepsilon\sqrt{\lambda}\big) \cdot \Phi_{qn}\big(\varepsilon\sqrt{\lambda+\delta}\big) - (\lambda+\delta)^{\frac{1}{2}} \cdot \Phi'_{qn}\big(\varepsilon\sqrt{\lambda+\delta}\big) \cdot \Phi_{qn}\big(\varepsilon\sqrt{\lambda}\big)\Big). \end{aligned}$$

Wenn nun $\varepsilon \to 0$ geht, so geht nach (62) $\Phi_{qn} \to \dfrac{1}{2^{qn}\Gamma(qn+1)}$ und $\Phi'_{qn} \to 0$; also ist $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Psi(\varepsilon) = 0$. Lassen wir in (65) $\varepsilon \to 0$ gehen, so erhalten wir:

$$\int_{0}^{R} \psi_{n,\lambda+\delta} \cdot \psi_{n\lambda}\, dr = \left[\psi'_{n,\lambda} \frac{\psi_{n,\lambda+\delta} - \psi_{n,\lambda}}{\delta} - \psi_{n,\lambda} \frac{\psi'_{n,\lambda+\delta} - \psi'_{n,\lambda}}{\delta}\right]_{r=R}. \tag{66}$$

Nach (61) ist:

$$\psi_{n\lambda}(R) = \sqrt{R} \cdot J_{qn}\big(R\sqrt{\lambda}\big),$$

$$\psi'_{n\lambda}(R) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R}} J_{qn}\big(R\sqrt{\lambda}\big) + \sqrt{R}\,\lambda\, J'_{qn}\big(R\sqrt{\lambda}\big),$$

$$\lim_{\delta \to 0}\left(\frac{\psi_{n,\lambda+\delta} - \psi_{n,\lambda}}{\delta}\right)_{r=R} = \frac{1}{2} \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \cdot J'_{qn}\big(R\sqrt{\lambda}\big),$$

$$\lim_{\delta \to 0}\left(\frac{\psi'_{n,\lambda+\delta} - \psi'_{n,\lambda}}{\delta}\right)_{r=R} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{R}{\lambda}} \cdot J'_{qn}\big(R\sqrt{\lambda}\big) + \frac{1}{2} \cdot R^{\frac{3}{2}} J''_{qn}\big(R\sqrt{\lambda}\big).$$

Setzt man dies in (66) ein, so erhält man für $\delta \to 0$:

$$(67)\qquad \begin{cases} \int\limits_0^R \psi_{n,\lambda}^2(r)\,dr \\ \qquad = \left[\frac{1}{2} R^2 J_{qn}'^2(x) - \frac{1}{2}\frac{R}{\lambda} J_{qn}(x) J_{qn}'(x) - \frac{1}{2} R^2 J_{qn}(x) J_{qn}''(x)\right]_{x=R\sqrt{\lambda}}. \end{cases}$$

Nun wollen wir unter λ wieder einen Eigenwert verstehen und mit Hilfe der Differentialgleichung

$$(68)\qquad J_{qn}''(x) = -\frac{1}{x}\cdot J_{qn}'(x) + \left(\frac{(qn)^2}{x^2} - 1\right) J_{qn}(x)$$

J_{qn}'' durch J_{qn}' und J_{qn} ausdrücken. Mit Hilfe von (48) und der Eigenwertsgleichung (47) drücken wir dann $J_{qn}'(\Lambda_\mu(qn))$ durch $J_{qn}(\Lambda_\mu(qn))$ aus und erhalten:

$$(69)\qquad \frac{1}{\tau_{n\mu}^2} = \frac{1}{2\lambda_{n\mu}}\cdot\left(\Lambda_\mu^2(qn) + \zeta^2 R^2 - (qn)^2\right)\cdot J_{qn}^2(\Lambda_\mu(qn)).$$

Daraus ergibt sich nebenbei, daß

$$(70)\qquad \Lambda_\mu^2(qn) > (qn)^2 - \zeta^2 R^2, \qquad \text{wenn} \qquad \lambda_{n\mu} > 0 \quad \text{ist.}$$

Setzen wir nun (69) in unsere Entwicklung (60) von $(r/R)^{qn}$ ein, so erhalten wir:

$$(71\,a)\qquad \left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = 2R\vartheta_n\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\Lambda_\mu^2(qn) + \zeta^2 R^2 - (qn)^2}\cdot\frac{J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)}{J_{qn}(\Lambda_\mu(qn))}.$$

Unter Verwendung der Abkürzung (14) ergibt sich

$$(71\,b)\qquad \left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = 2R\vartheta_n\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)}{C_{n\mu}}.$$

Die Koeffizienten $\eta_{n\mu}$, $c_{n\mu}$ und $e_{n\mu}$ der Gln. (52a und b) bzw. (50) lauten also

$$(72)\qquad \eta_{n\mu} = 2R\vartheta_n\cdot\frac{1}{\left(\Lambda_\mu^2(qn) + \zeta^2 R^2 - (qn)^2\right)\cdot J_{qn}(\Lambda_\mu(qn))} = \frac{2R\vartheta_n}{C_{n\mu}};$$

$$(73)\qquad c_{n\mu} = \frac{2R}{C_{n\mu}}\cdot A_n'(\tau); \qquad e_{n\mu} = \frac{2R}{C_{n\mu}} B_n'(\tau).$$

Fassen wir nun die Gln. (73), (48) und (50) zusammen, so erhalten wir:

$$(74)\qquad \begin{cases} \Delta(r;\varphi;t;\tau) \\ \qquad = 2R\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\cos n\varphi\cdot A_n'(\tau)\cdot\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)}{C_{n\mu}}\cdot e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda_\mu^2(qn)}{kR^2}} + \\ \qquad + \sin n\varphi\cdot B_n'(\tau)\cdot\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)}{C_{n\mu}} e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda_\mu^2(qn)}{kR^2}}\Bigg\} \end{cases}$$

und nach (38)

$$(75)\qquad \delta(r;\varphi;t) = -2R\int_{t_0}^{t}\sum_{n=0}^{\infty}\{\cdots\}\,d\tau.$$

Nun erfüllen die einzelnen Reihenglieder von (74) und (40) ihre Differentialgleichungen und Randbedingungen. Der Schluß, daß dann auch $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$, $g(r;\varphi;t)$ und $f(r;\varphi;t)$ dies tuen, ist ebenso wie der Übergang von (75) auf (22) aber erst dann möglich, wenn die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihen (74) und (39) bzw. (40) und der aus ihnen bei gliedweiser Differentiation entstehenden Reihen bewiesen wurde. Dieser Beweis soll nun erbracht werden.

Kap. III. Die absolute und gleichmäßige Konvergenz und die gliedweise Differenzierbarkeit der Reihen $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$, $\delta(r;\varphi;t)$, $G(r;\varphi;\tau)$, $g(r;\varphi;t)$.

§ 9. Bezeichnungen und Formeln.

Es werden auch im folgenden die in § 2 unter (6) bis (16) eingeführten Bezeichnungen und Abkürzungen benützt; speziell sei an die Bezeichnungen (10) bis (12) erinnert. Wir wollen nun einige im folgenden gebrauchte Formeln für die BESSELsche Funktion zusammenstellen [4; S. 148f.], [5; S. 16], [6; S. 99]:

(76) $$J_\nu''(x) = -\frac{1}{x} J_\nu'(x) + \frac{\nu^2 - x^2}{x^2} \cdot J_\nu(x);$$

(77) $$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} \cdot J_\nu(x);$$

(78) $$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 \cdot J_\nu'(x).$$

Aus (77) und (78) erhält man:

(79) $$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} \cdot J_\nu(x) - J_\nu'(x);$$

(80) $$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x).$$

Mit Hilfe von (76) erhält man daraus:

(81) $$J_{\nu+1}'(x) = J_\nu(x) \frac{x^2 - \nu(\nu+1)}{x^2} + J_\nu'(x) \cdot \frac{\nu+1}{x};$$

(82) $$J_{\nu-1}'(x) = J_\nu(x) \frac{\nu(\nu-1) - x^2}{x^2} + J_\nu'(x) \frac{\nu-1}{x}.$$

Setzt man

(83) $$J_\nu(x) = x^\nu \cdot \Phi_\nu(x),$$

dann ist [2; S. 420f.], [5; S. 16], [6; S. 114]:

(84) $$\Phi_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

(85) $$\Phi_\nu'(x) = -x \cdot \Phi_{\nu+1}(x).$$

Für die erste positive Extremstelle $X_1(\nu)$ [vgl. (11)] der BESSELschen Funktion gilt [7; S. 486]:

$$X_1^2(\nu) > \nu(\nu+2), \quad \text{wenn} \quad \nu > 0; \tag{86}$$

$$x_1(\nu) > X_1(\nu) \quad \text{für} \quad \nu > 0 \quad \text{und} \tag{87}$$

$$x_1(\nu+1) > x_1(\nu) \quad \text{für} \quad \nu \geq 0. \tag{88}$$

§ 10.

Hilfssatz I. *a) Für $\mu \geq 2$ hat die Gl.* (12) *in jedem Bereich $x_{\mu-1}(\nu) < x < x_\mu(\nu)$ genau eine Lösung $\Lambda_\mu(\nu)$, und zwar ist*

$$x_{\mu-1}(\nu) < \Lambda_\mu(\nu) < X_\mu(\nu) < x_\mu(\nu), \quad \textit{wenn} \quad \zeta \cdot R < 0 \quad \textit{ist},$$
$$x_{\mu-1}(\nu) < X_\mu(\nu) < \Lambda_\mu(\nu) < x_\mu(\nu), \quad \textit{wenn} \quad \zeta \cdot R > 0 \quad \textit{ist}.$$

b) Wenn $-\zeta R < \nu$ ist, dann befindet sich auch im Bereich $0 < x < x_1(\nu)$ eine Lösung $\Lambda_1(\nu)$ von (12) *und zwar ist*

$$0 < \Lambda_1(\nu) < X_1(\nu) < x_1(\nu), \quad \textit{wenn} \quad \zeta \cdot R < 0 \quad \textit{ist und}$$
$$0 < X_1(\nu) < \Lambda_1(\nu) < x_1(\nu), \quad \textit{wenn} \quad \zeta \cdot R > 0 \quad \textit{ist}.$$

Wenn $-\zeta R > \nu$ ist, dann existiert im Bereich $0 < x < x_1(\nu)$ keine Lösung von (12).

c) Wenn $-\zeta R < \nu$ ist, dann hat (12) *keine rein imaginären Lösungen.*

Wenn $-\zeta R > \nu$ ist, dann hat (12) *ein Paar rein imaginärer Lösungen $\pm \Lambda_1(\nu)$.*

Beweis. a) Wir setzen

$$H_\nu(x) = \frac{x \cdot J_\nu'(x)}{J_\nu(x)}. \quad \text{Dann ist} \tag{89}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_\mu(\nu)+0} H_\nu(x) = \infty; & H_\nu(\Lambda_\mu(\nu)) = -\zeta \cdot R; \\ H_\nu(X_\mu(\nu)) = 0, & \lim\limits_{x \to x_\mu(\nu)-0} H_\nu(x) = -\infty. \end{cases} \tag{90}$$

Für $H_\nu'(x)$ erhält man mit Hilfe von (76):

$$H_\nu' = \frac{-1}{x \cdot J_\nu^2(x)} \cdot [x^2 \cdot (J_\nu^2 + J_\nu'^2) - \nu^2 \cdot J_\nu^2]. \tag{91}$$

Wir beweisen nun, daß für $x > 0$ und $\nu \geq 0$ immer

$$H_\nu'(x) < 0 \quad \text{ist.} \tag{92}$$

1. Für $\nu = 0$ ist (92) evident.
2. Ebenso für $\nu > 0$ und $x > \nu$.
3. Es sei $0 < x \leq \nu$.

Wir setzen $J_\nu(x) = x^\nu \cdot \Phi_\nu(x)$; dann ist $x \cdot J_\nu' = \nu \cdot J_\nu + x^{\nu+1} \cdot \Phi_\nu'$. Unter Benützung von (85) ergibt sich:

$$\nu \cdot J_\nu = x \cdot J_\nu' + x^{\nu+2} \cdot \Phi_{\nu+1}. \tag{93}$$

Aus (88), (87) und (86) folgt, daß für $0 < x \leq \nu$

$$\Phi_{\nu+1} > 0 \quad \text{und} \quad J_\nu' > 0 \quad \text{ist.}$$

Also ergibt sich aus (93):

$$\nu^2 J_\nu^2 > x^2 \cdot J_\nu'^2 \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq \nu.$$

Daraus folgt weiterhin

$$-\frac{1}{x} \cdot J_\nu'^2 > -\frac{\nu^2}{x^3} \cdot J_\nu^2;$$

$$J_\nu \cdot J_\nu' - \frac{1}{x} \cdot J_\nu'^2 + \frac{\nu^2 - x^2}{x^2} \cdot J_\nu \cdot J_\nu' > \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu \cdot J_\nu' - \frac{\nu^2}{x^3} \cdot J_\nu^2.$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung (76) ergibt sich daraus:

$$2 \cdot J_\nu J_\nu' + 2 J_\nu' \cdot J_\nu'' > 2 \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu \cdot J_\nu' - 2 \frac{\nu^2}{x^3} \cdot J_\nu^2.$$

Wenn nun $0 < a_1 < a_2 < b \leqq \nu$ ist, folgt daraus:

$$\int_{a_2}^{b} (2 J_\nu J_\nu' + 2 J_\nu' J_\nu'')\, dx > \int_{a_2}^{b} \left(2 \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu J_\nu' - 2 \frac{\nu^2}{x^3} \cdot J_\nu^2\right) dx:$$

also

$$[J_\nu^2 + J_\nu'^2]_{a_2}^{b} > \left[\frac{\nu^2}{x^2} J_\nu^2\right]_{a_2}^{b}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt:

$$\left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right)_{x=b} > \left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} J_\nu^2\right)_{x=a_2}. \tag{94}$$

Analog erhalten wir

$$\left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right)_{x=a_2} > \left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right)_{x=a_1}. \tag{95}$$

Auf der rechten Seite dieser Ungleichung lassen wir $a_1 \to 0$ gehen und verwenden (83) und (85); so erhalten wir

$$\lim_{x \to 0}\left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot (2\nu \cdot x^{2\nu+1} \cdot \Phi_\nu \cdot \Phi_\nu' + x^{2\nu+2} \cdot \Phi_\nu'^2)$$

$$= \lim_{x \to 0} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (-2\nu \cdot x^{2\nu+2} \cdot \Phi_\nu \cdot \Phi_{\nu+1} + x^{2\nu+4} \Phi_{\nu+1}^2) = 0 \quad (\text{da } \nu > 0).$$

Aus (95) und (94) ergibt sich vermittels dieses Grenzübergangs zunächst

$$\left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right)_{x=a_2} \geq 0; \quad \text{und dann}$$

$$\left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right)_{x=b} > 0. \tag{96}$$

Ersetzen wir b durch x, so besagt (96), daß

$$H_\nu'(x) < 0 \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq \nu.$$

Nach S. 441 gilt somit allgemein, daß

$$H_\nu'(x) < 0 \quad \text{ist für} \quad \nu \geq 0 \quad \text{und} \quad x > 0.$$

Beachten wir dazu noch (90), so können wir schließen, daß $H_\nu(x)$ eine monoton abnehmende Funktion von x ist, die in jedem der Bereiche $x_\mu(\nu) \leqq x \leqq x_{\mu+1}(\nu)$ $(\mu = 1; 2; \ldots)$ von $+\infty$ nach $-\infty$ läuft und dabei jeden Wert speziell auch die Werte $-\zeta R$ und 0 genau einmal erreicht, und zwar den größeren zuerst. Damit ist Absatz a) unseres Hilfssatzes I bewiesen.

b) Auch im Bereich $0 < x \leqq x_1(\nu)$ ist $H_\nu(x)$ eine monoton abnehmende Funktion von x. Ferner ist

$$\lim_{x \to x_1(\nu) - 0} H_\nu(x) = -\infty$$

und

$$\lim_{x \to 0} H_\nu(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\nu \cdot x^\nu \cdot \Phi_\nu + x^{\nu+1} \cdot \Phi_\nu'}{x^\nu \cdot \Phi_\nu} = \nu. \tag{97}$$

Also hat die Gleichung $H_\nu(x) = -\zeta R$, die gleichbedeutend mit (12) ist, dann und nur dann eine Lösung λ_1 im Bereich $0 < x < x_1(\nu)$, wenn $\nu > -\zeta R$ ist. Damit ist Absatz b) des Hilfssatzes I bewiesen.

c) Um die rein imaginären Lösungen von (12) zu erhalten, setzen wir $x = i \cdot \xi$. Wir können uns dann auf nicht negative, reelle Werte von ξ beschränken. Eine Differentiation nach ξ bezeichnen wir mit $\dot{}$, eine nach x mit $'$; also

$$\frac{df}{dx} = f'; \quad \frac{df}{d\xi} = \dot{f}.$$

Es ist

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{i} \frac{df}{d\xi}.$$

Wir setzen wieder $J_\nu = x^\nu \cdot \Phi_\nu(x)$, dann gilt

$$x \cdot \Phi_\nu'' + (2\nu + 1) \cdot \Phi_\nu' + x \cdot \Phi_\nu = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\xi \cdot \Phi_\nu^{\cdot\cdot} + (2\nu + 1) \cdot \Phi_\nu^{\cdot} - \xi \Phi_\nu = 0. \tag{98}$$

Die Reihenentwicklung für Φ_ν lautet (84):

$$\Phi_\nu(\xi) = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\, \Gamma(\nu + m + 1)} \cdot \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m}, \tag{99}$$

$\Phi_\nu(\xi)$ ist also eine stets positive, monoton wachsende Funktion von ξ; dasselbe gilt von sämtlichen Ableitungen nach ξ, mit der einzigen Einschränkung, daß die ungeraden Ableitungen für $\xi = 0$ verschwinden. Nun ist:

$$H_\nu(x) = \frac{x \cdot J_\nu'(x)}{J_\nu(x)} = \nu + \frac{x \cdot \Phi_\nu'}{\Phi_\nu} = \nu + \frac{\xi \Phi_\nu^{\cdot}}{\Phi_\nu}, \tag{100}$$

$$\frac{d}{d\xi} H_\nu = \frac{1}{\Phi_\nu^2} \cdot (\Phi_\nu \cdot \Phi_\nu^{\cdot} + \xi \Phi_\nu \cdot \Phi_\nu^{\cdot\cdot} - \xi \Phi_\nu^{\cdot 2})$$

$$= \frac{1}{\Phi_\nu^2} \cdot (\xi \Phi_\nu^2 - 2\nu \Phi_\nu \Phi_\nu^{\cdot} - \xi \Phi_\nu^{\cdot 2}) \quad [\text{nach (98)}].$$

Wir wollen nun zeigen, daß für $\xi > 0$ immer

$$\Psi(\xi) = \xi \Phi_\nu^2 - 2\nu \Phi_\nu \cdot \Phi_\nu' - \xi \Phi_\nu'^2 > 0 \quad \text{ist.} \tag{101}$$

Auf Grund der Reihenentwicklung (99) erhält man als erstes Glied der Reihenentwicklung von $\Psi(\xi)$

$$\Psi(\xi) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu} \left(\frac{1}{\Gamma^2(\nu+1)} - \frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\cdot\Gamma(\nu+2)} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \xi + \xi^2 \cdot (\cdots)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\cdot\Gamma(\nu+2)} \cdot \xi + \xi^2 \cdot (\cdots).$$

Es gilt also (101) jedenfalls für kleine ξ. Nehmen wir nun an, die Ungleichung (101) gilt nicht für alle $\xi > 0$, dann muß es ein $\xi_0 > 0$ geben, so daß

(102a) für $\xi = \xi_0$ 1. $\Psi(\xi_0) = 0$;

(102b) 2. $\left(\frac{d}{d\xi} \Psi(\xi)\right)_{\xi=\xi_0} \leqq 0$ ist.

Mit Hilfe von (98) erhält man

$$\frac{d}{d\xi} \Psi(\xi) = \frac{2\nu+1}{\xi} \left(2\nu \Phi_\nu \cdot \Phi_\nu' + \xi \cdot \Phi_\nu'^2 - \frac{2\nu-1}{2\nu+1} \xi \Phi_\nu^2 \right).$$

An der Stelle $\xi = \xi_0$ ist nach (102a) und (101)

$$2\nu \Phi_\nu \Phi_\nu' + \xi_0 \Phi_\nu'^2 = \xi_0 \Phi_\nu^2.$$

Daraus ergibt sich, daß an $\xi = \xi_0$

$$\frac{d}{d\xi} \Psi(\xi_0) = \frac{2\nu+1}{\xi_0} \xi_0 \Phi_\nu^2 \cdot \left(1 - \frac{2\nu-1}{2\nu+1}\right) = 2 \cdot \Phi_\nu^2 > 0$$

im Widerspruch zu (102b). Also ist für $\xi > 0$ immer $\Psi(\xi) > 0$. Das heißt: Es ist

$$\frac{d}{d\xi} H_\nu > 0, \quad \text{wenn} \quad \xi > 0. \tag{103}$$

Nun ist nach (97) bzw. (100)

$$\lim_{\xi \to 0} H_\nu = \nu. \tag{104}$$

Ferner ist

$$\lim_{\xi \to \infty} H_\nu = \infty. \tag{105}$$

Aus (103), (104) und (105) folgt, daß für $\xi > 0$ $H_\nu > \nu$ ist und jeden Wert, der größer als ν ist, genau einmal annimmt. Damit ist Absatz c unseres Hilfssatzes I bewiesen.

§ 11.

Hilfssatz II. *Es gibt eine positive Zahl C, die nur von ζR abhängt, so daß*

$$|J_\nu(A_\mu(\nu))| \geqq C \cdot |J_\nu(X_\mu(\nu))| \tag{106}$$

ist für alle μ und $\nu \geqq 0$, für die nicht gleichzeitig $\mu = 1$ und $\nu \leqq \operatorname{Max}(2; -2\zeta R)$ ist.

Es lassen sich verschiedene Abschätzungen für C geben; beispielsweise kann

$$C = \operatorname{Min}\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\zeta R|};\ \frac{1}{1+\frac{2\zeta^2 R^2}{2{,}4^2}}\right)$$

gesetzt werden.

Für C lassen sich auch Ausdrücke aufstellen, in denen μ und ν vorkommt. Nach (108) und (111) ist z.B.

$$|J_\nu(\Lambda_\mu(\nu))| > \frac{1}{1+\frac{8\zeta^2 R^2}{\mu^2+4\mu\nu}} \cdot |J_\nu(X_\mu(\nu))|$$

für $\mu \geqq 2$ und $\nu \geqq \nu_0$, wobei $\nu_0 > 0$, aber sonst beliebig, ist. Man sieht, daß *für großes μ und $\nu \geqq \nu_0$ oder für großes ν und $\mu \geqq 2$* $\frac{|J_\nu(\Lambda_\mu)|}{|J_\nu(X_\mu)|} \sim 1$ *ist.*

Beweis.

I. Es sei $\nu > 0$; $\mu \geqq 2$; $\zeta R > 0$ und $J_\nu(x) > 0$ für $X_\mu \leqq x \leqq \Lambda_\mu$.

Dann ist für $X_\mu \leqq x \leqq \Lambda_\mu$ nach (90) und (92):

$$0 \geqq \frac{x \cdot J_\nu'}{J_\nu} \geqq -\zeta R; \quad \text{also} \quad \frac{-\zeta R}{x} \leqq \frac{J_\nu'}{J_\nu}.$$

Daraus folgt durch Integration von X_μ bis Λ_μ:

$$-\zeta R \lg \frac{\Lambda_\mu}{X_\mu} \leqq \lg \frac{J_\nu(\Lambda_\mu)}{J_\nu(X_\mu)};$$

also

$$J_\nu(\Lambda_\mu) \geqq \left(\frac{X_\mu}{\Lambda_\mu}\right)^{\zeta R} \cdot J_\nu(X_\mu). \tag{107}$$

Nun ist für $\nu > 0$, $\mu \geqq 2$ [3; S. 219f., Gl. (C), (E) und (M)]:

$$\pi\mu - \frac{3\pi}{2} + \nu < x_{\mu-1} < X_\mu < \Lambda_\mu < \pi\mu + \frac{\pi}{2}\nu. \tag{108}$$

Daraus erhält man (wegen $\mu \geqq 2$)

$$\frac{X_\mu}{\Lambda_\mu} \geqq \frac{\pi\mu - \frac{3\pi}{2} + \nu}{\pi\mu + \frac{\pi}{2}\nu} \geqq \frac{\frac{\pi}{2} + \nu}{2\pi + \frac{\pi}{2}\nu} \geqq \frac{1}{4}; \tag{109}$$

also

$$J_\nu(\Lambda_\mu) \geqq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{\zeta R} \cdot J_\nu(X_\mu).$$

II. Ganz analog läßt sich für die Fälle:

1. $\nu > 0$; $\mu \geqq 2$; $\zeta R > 0$; $J_\nu(x) < 0$,
2. $\nu > 0$; $\mu \geqq 2$; $\zeta R < 0$; $J_\nu(x) > 0$ und
3. $\nu > 0$; $\mu \geqq 2$; $\zeta R < 0$; $J_\nu(x) < 0$

beweisen, daß

$$|J_\nu(\Lambda_\mu)| \geqq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{|\zeta R|} \cdot |J_\nu(X_\mu)| \quad \text{ist.}$$

III. $\nu > 2$; $\mu = 1$; $\zeta R > 0$.

In diesem Falle ist $0 < X_1(\nu) < \Lambda_1(\nu) < x_1(\nu)$ und für $0 < x < x_1(\nu)$ ist $J_\nu(x) > 0$.

Nun ist $\nu \cdot (\nu + 2) < X_1^2(\nu) < \Lambda_1^2(\nu)$ und $x_1(\nu) < \pi + \frac{\pi}{2}\nu$ [3; (E), (M)].

Daraus ergibt sich:

$$\frac{X_1}{\Lambda_1} > \frac{\nu}{\pi + \frac{\pi}{2}\nu} > \frac{1}{\pi}.$$

Eingesetzt in (107): $J_\nu(\Lambda_1) > \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\zeta R} \cdot J_\nu(X_1)$.

IV. $\nu > \mathrm{Max}\,(2; -2\zeta R)$; $\mu = 1$; $\zeta R < 0$.

Nach (70) ist

$$\Lambda_1^2 > \nu^2 - \zeta^2 R^2; \quad \text{also} \quad \Lambda_1 > \nu + \zeta R.$$

Somit wird

$$\frac{\Lambda_1}{X_1} > \frac{\nu + \zeta R}{\pi + \frac{\pi}{2}\nu} = \frac{2\nu + 2\zeta R}{2\pi + \pi\nu} > \frac{\nu}{2\pi + \pi\nu} > \frac{1}{2\pi} \quad \text{und}$$

$$J_\nu(\Lambda_1) \geq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\zeta R|} \cdot J_\nu(X_1).$$

V. $\nu = 0$; $\mu \geq 2$; $\zeta R > 0$.

Die Abschätzung (108) gilt nur für $\nu > 0$. Man könnte sie wohl durch Stetigkeitsüberlegungen bis $\nu = 0$ ausdehnen; dann würde (109) auch für $\nu = 0$ gelten. Wir wollen aber lieber einen anderen Weg gehen, der auch für $\nu > 0$ anwendbar ist und Abschätzungen anderer Form für C liefert.

(110) Es sei $J_\nu(x) > 0$ für $x_{\mu-1} < x < x_\mu$.

Wir setzen $K_\nu(x) = a \cdot J_\nu + b \cdot x \cdot J_\nu'$; dann ist

$$K_\nu'(x) = a \cdot J_\nu' + b \cdot \frac{\nu^2 - x^2}{x} \cdot J_\nu.$$

Nun ist wegen (90), (92) und (110):

$$x \cdot J_\nu' \geq -\zeta R \cdot J_\nu \quad \text{für} \quad X_\mu \leq x \leq \Lambda_\mu; \quad \text{also}$$

$$K_\nu'(x) \geq \frac{J_\nu}{x} \cdot (-b \cdot (x^2 - \nu^2) - a\,\zeta R) \quad (\text{wenn} \quad a \geq 0).$$

Wählt man nun $a > 0$ und $b < 0$ geeignet, so kann man erreichen, daß

$$K_\nu'(x) > 0 \quad \text{für} \quad X_\mu \leq x \leq \Lambda_\mu.$$

Je nach Wahl von a und b erhält man dann verschiedene Abschätzungen für $\left|\frac{J_\nu(\Lambda)}{J_\nu(X)}\right|$.

Wir setzen beispielsweise: $a = \frac{1}{\zeta R}$ und $b = \frac{-2}{x_{\mu-1}^2(\nu) - \nu^2}$ (NB! $\mu \geq 2$).

Dann wird $K_\nu'(x) > \frac{J_\nu(x)}{x} > 0$ für $X_\mu \leq x \leq \Lambda_\mu$.

Infolgedessen ist $K_\nu(\Lambda_\mu) > K_\nu(X_\mu)$; also

$$a \cdot J_\nu(\Lambda_\mu) + b \cdot J_\nu'(\Lambda_\mu) \cdot \Lambda_\mu > a \cdot J_\nu(X_\mu)$$

und nach (12)

$$(a - b \cdot \zeta R) \cdot J_\nu(\Lambda_\mu) > a \cdot J_\nu(X_\mu)$$

$$\left(\frac{1}{\zeta R} + \frac{2}{x_{\mu-1}^2 - \nu^2} \cdot \zeta R\right) \cdot J_\nu(\Lambda_\mu) > \frac{1}{\zeta R} \cdot J_\nu(X_\mu).$$

$$J_\nu(\Lambda_\mu) > \frac{1}{1 + \frac{2}{x_{\mu-1}^2(\nu) - \nu^2} \cdot \zeta^2 R^2} \cdot J_\nu(X_\mu). \tag{111}$$

Hier darf $\nu = 0$ sein. Beachtet man, daß $x_{\mu-1}(0) \geqq x_1(0) \approx 2{,}4$ ist [4; S. 166], so erhält man für $\nu = 0$, $\mu \geqq 2$; $\zeta R > 0$ und $J_0(x) > 0$, daß

$$C = \frac{1}{1 + \frac{2\,\zeta^2 R^2}{2{,}4^2}}$$

gesetzt werden kann.

VI. Ganz analog ergibt sich die Gültigkeit von (111) auch für die Fälle

1. $\nu = 0$; $\mu \geqq 2$; $\zeta R > 0$; $J_0(x) < 0$
2. $\nu = 0$; $\mu \geqq 2$; $\zeta R < 0$; $J_0(x) > 0$ und
3. $\nu = 0$; $\mu \geqq 2$; $\zeta R < 0$; $J_0(x) < 0$.

Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

§ 12.

Hilfssatz III. *q sei irgendeine positive Zahl und ζR sei fest gegeben, jedoch so, daß es keine ganze positive Zahl m gibt, so daß $q\,m = -\zeta R$ ist. Dann gibt es eine positive Zahl k', so daß*

$$|J_{qn}(\Lambda_\mu(q\,n))| > \frac{k'}{(q\,n + \mu)^{\frac{1}{3}}\,\mu^{\frac{1}{6}}} \tag{112}$$

ist für $n = 0; 1; 2; \ldots$; $\mu = 1; 2; 3; \ldots$.

Beweis.

I. Nach Hilfssatz II gibt es eine positive Zahl C, so daß

$$|J_\nu(\Lambda_\mu(\nu))| > C\,|J_\nu(X_\mu(\nu))|,$$

wenn nicht gleichzeitig $\mu = 1$ und $\nu \leqq \mathrm{Max}\,(2; -2\zeta R)$ ist. Nun gibt es nur endlich viele Werte $q\,n$, für die $q\,n \leqq \mathrm{Max}\,(2; -2\zeta R)$ ist. Ihre Anzahl sei $n_0 + 1$. Setzen wir

$$\mathrm{Min}\left(\frac{J_0(\Lambda_1(0))}{J_0(X_1(0))}; \frac{J_q(\Lambda_1(q))}{J_q(X_1(q))}; \ldots \frac{J_{q\,n_0}(\Lambda_1(q\,n_0))}{J_{q\,n_0}(X_1(q\,n_0))}\right) = C',$$

so ist $C' > 0$ und für $C'' = \mathrm{Min}\,(C; C')$ gilt dann

$$\begin{cases} 1.\ C'' > 0 \\ 2.\ |J_{qn}(\Lambda_\mu(q\,n))| \geqq C'' \cdot |J_{qn}(X_\mu(q\,n))| \\ \quad \text{für} \quad n = 0; 1; 2; \ldots; \mu = 1; 2; 3; \ldots. \end{cases} \tag{113}$$

II. Die $J_\nu(X_\mu(\nu))$ sind die Extremwerte, die die BESSELsche Funktion auf den Wellenbergen bzw. in den Wellentälern annimmt. Für sie gilt, soferne $\nu > \nu_0$ (wir können $\nu_0 = q/2$ setzen) und $x \geqq x_1(\nu)$ ist [3; S. 219 (F_2)]:

$$|J_\nu(X_\mu(\nu))| > \frac{k'}{(\nu+m)^{\frac{1}{3}} m^{\frac{1}{6}}},$$

wobei $k' > 0$ ist und von ν, μ und m nicht abhängt. μ und m hängen so zusammen, daß entweder $\mu = 2m-1$ oder $\mu = 2m$ ist; somit ist $m \leqq (\mu+1):2$. Da außerdem $\mu > 1$ ist, ist $m < \mu$. Also

$$|J_{qn}(X_\mu(qn))| > \frac{k'}{(qn+\mu)^{\frac{1}{3}} \mu^{\frac{1}{6}}}. \tag{114}$$

Diese Ungleichung gilt wegen der Voraussetzung „$\nu > \nu_0 = q/2$ und $x > x_1(\nu)$" für $n \geqq 1$ und $\mu \geqq 2$. Dagegen muß sie für $n = 0$; $\mu \geqq 1$ und für $\mu = 1$; $n \geqq 1$ noch bewiesen werden.

a) $\mu = 1$; $n \geqq 1$.

Es ist $X_1(\nu) > \nu$. Da $J'_\nu(x) > 0$ ist für $0 < x < X_1(\nu)$, ist $J_\nu(X_1(\nu)) > J_\nu(\nu)$. Nun ist $\nu^{\frac{1}{3}} \cdot J_\nu(\nu)$ eine monoton wachsende beschränkte Funktion von ν, die für $\nu > 0$ positiv ist [7; S. 260]; somit ist bei geeigneter Wahl von $k' > 0$ für $n \geqq 1$

$$J_{qn}(X_1(qn)) > J_{qn}(qn) > \frac{1}{(qn)^{\frac{1}{3}}} \cdot J_{q/2}\left(\frac{q}{2}\right) \cdot \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \frac{k'}{(qn+1)^{\frac{1}{3}}}. \tag{115}$$

b) $qn = 0$.

Es gilt die asymptotische Entwicklung [2; S. 288]:

$$J_0(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} \sin(x+b) + 0\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{116}$$

Daraus folgt, daß bei geeigneter Wahl von M, $k'' > 0$ und $k''' > 0$ für $\mu \geqq M$

$$|J_0(X_\mu(0))| > \frac{k''}{\sqrt{x}} > \frac{k'''}{\sqrt{\mu}} \quad \text{ist.}$$

Da die $(M-1)$ Werte $|J_0(X_\mu(0))|$, für die $1 \leqq \mu \leqq M-1$ ist, alle positiv sind, so läßt sich $k' > 0$ so wählen, daß allgemein für $\mu \geqq 1$

$$|J_0(X_\mu(0))| > \frac{k'}{\sqrt{\mu}}. \tag{117}$$

Aus (115) und (117) folgt, daß die Ungleichung (114) nicht nur für $n \geqq 1$, $\mu \geqq 2$ gilt, sondern allgemein für $n = 0; 1; 2; \ldots$ $\mu = 1; 2; 3; \ldots$ bei geeigneter Wahl von $k' > 0$.

III. Durch Zusammenfassung von (114) und (113) ergibt sich der Hilfssatz III.

§ 13. Abschätzung von $\Lambda_\mu^2(qn) + \zeta^2 R^2 - (qn)^2$.

Aus (91) und (92) folgt, daß für $x > 0$ und $\nu \geqq 0$ gilt:

$$x^2(J_\nu^2 + J_\nu'^2) - \nu^2 \cdot J_\nu^2 > 0.$$

Setzen wir $\nu = q\,n$, $x = \Lambda_\mu(q\,n)$ und verwenden wir, daß $\Lambda \cdot J'_{q\,n}(\Lambda) - \zeta R \times J_{q\,n}(\Lambda)$ ist, so erhalten wir daraus:

$$\Lambda_\mu^2(q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2 > 0 \quad \text{für} \quad \Lambda_\mu(q\,n) > 0.$$

Nach Hilfssatz I sind aber nur die endlich vielen Werte $\Lambda_1(q\,n)$ nicht positiv, für die $q\,n < -\zeta R$ ist.

I. Für $\mu \geqq 2$; $n \geqq 1$ ist nach (108)

$$\pi\left(\mu - \tfrac{3}{2}\right) + q\,n < x_{\mu-1}(q\,n) < \Lambda_\mu(q\,n); \quad \text{also} \tag{118}$$

$$\Lambda_\mu(q\,n) > \tfrac{1}{2}\,\mu + q\,n \quad \text{und} \quad \Lambda^2 + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2 > \tfrac{1}{4}\,\mu\,(\mu + q\,n). \tag{119a, b}$$

II. $\mu = 1$; $q\,n > \begin{cases} 0 \\ -2\zeta R. \end{cases}$

Setzen wir in (71a) $r = R$, so erhalten wir

$$1 = 2 \cdot (q\,n + \zeta R) \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_\mu^2(q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2} > q\,n \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \cdots.$$

Da alle Glieder der Summe positiv sind, folgt daraus

$$\Lambda_1^2(q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2 > q\,n \geqq (q\,n + 1) \cdot c, \tag{119c}$$

wenn $c = \frac{q}{q+1}$ gesetzt wird.

III. $n = 0$; $\mu \geqq 2$.

Nach (116) gibt es eine positive Zahl c', so daß

$$\Lambda_\mu(0) > x_{\mu-1}(0) > c' \cdot \mu \quad \text{für} \quad \mu \geqq 2. \tag{119d}$$

Faßt man I., II. und III. zusammen, so erhält man: *Es ist*

$$\Lambda_\mu^2(q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2 > c'' \cdot \mu \cdot (\mu + q\,n), \tag{120}$$

wobei $c'' > 0$ ist und von n und μ nicht abhängt, für alle Wertepaare $(\mu; n)$, außer wenn $(\mu; n) = (1; 0)$ oder gleichzeitig $\mu = 1$ und $n < -2\zeta R$ ist. Es sind also nur endlich viele Wertepaare $(\mu; n)$ von der Ungleichung (120) ausgenommen.

§ 14. Die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihenentwicklungen von $\Delta(r; \varphi; t; \tau)$ und $G(r; \varphi; \tau)$ und ihre gliedweise Differenzierbarkeit.

Auf Grund der Voraussetzungen (17) über $S(\varphi; t)$ und $\partial S/\partial t$ gibt es eine Zahl M, so daß für die Koeffizienten der FOURIERschen Reihenentwicklungen dieser beiden Funktionen nach φ gilt [2; S. 62]:

$$\begin{cases} |A_n(t)| < \dfrac{M}{(n+1)^3}; & |B_n(t)| < \dfrac{M}{(n+1)^3}; \\ |A'_n(t)| < \dfrac{M}{(n+1)^3}; & |B'_n(t)| < \dfrac{M}{(n+1)^3}; \qquad n = 0; 1; 2; \ldots. \end{cases} \tag{121}$$

Aus (39), (40), (9) und (121) entnimmt man, daß bei geeigneter Wahl von $C_1 > 0$ die Reihe

$$C_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4}$$

eine Majorante von $G(r;\varphi;t)$ und $g(r;\varphi;t)$ ist.

Differenziert man die Reihen für G bzw. g gliedweise einmal oder zweimal nach r bzw. zweimal nach φ, so tritt zum allgemeinen Glied der Faktor

$$\frac{qn}{r}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{qn(qn-1)}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad n^2.$$

Man sieht, daß für die differenzierten Reihen sich bzw. folgende Majoranten ergeben:

$$\frac{1}{r} \cdot (qC_1) \sum \frac{1}{(n+1)^3}; \quad \frac{1}{r^2}(q^2 C_1) \sum \frac{1}{(n+1)^2}; \quad C_1 \cdot \sum \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Daraus folgt, daß die gliedweise differenzierten Reihen für $r \geq r_0$ absolut und gleichmäßig konvergieren, wobei $r_0 > 0$ sein muß, aber beliebig nahe an 0 liegen darf; d.h. die gliedweise Differentiation ist gestattet in der Umgebung jedes Wertes $r > 0$.

Setzen wir $\Delta(r;\varphi;t;\tau) = \sum_{\substack{n=0 \\ \mu=1}}^{\infty} d_{n\mu}(r;\varphi;t;\tau)$, so ist nach (74)

$$(122)\quad d_{n\mu} = 2R\left(A_n'(\tau)\cos n\varphi + B_n'(\tau)\cdot \sin n\varphi\right) \frac{J_{qn}\left(\Lambda_\mu(qn)\,\frac{r}{R}\right) e^{-\frac{(t-\tau)\cdot \Lambda_\mu^2}{kR^2}}}{J_{qn}(\Lambda_\mu(qn))\,(\Lambda_\mu^2(qn) + \zeta^2 R^2 - (qn)^2)}.$$

Für $\nu \geq 0$, $x \geq 0$ ist die BESSELsche Funktion beschränkt, so daß wir

$$(123)\qquad |J_\nu(x)| < K$$

setzen können.

Auf Grund der Ungleichungen (121), (123), (120) und (112) gilt nun mit nur endlich vielen Ausnahmen, die durch die beschränkte Gültigkeit von (120) bedingt sind:

$$|d_{n\mu}| < \frac{4RM}{(n+1)^3} \cdot \frac{K(qn+\mu)^{\frac{1}{3}}\mu^{\frac{1}{6}}}{k' \cdot c''(\mu + qn)\,\mu}$$

$$< C_2 \cdot \frac{1}{(n+1)^3 (qn+\mu)^{\frac{2}{3}} \mu^{\frac{1}{6}}} \leq C_2 \cdot \frac{1}{(n+1)^3 \cdot \mu^{\frac{5}{6}}}.$$

Da diese Ungleichung nur für endlich viele $d_{n\mu}$ nicht gilt und diese beschränkt sind, kann man durch Änderung von C_2 erreichen, daß sie allgemein gilt. Die neue Konstante heiße C'. Es ist dann

$$\sum_{\substack{n=0 \\ \mu=1}}^{\infty} \frac{C'}{(n+1)^3 \mu^{\frac{5}{6}}} = C' \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^{\frac{5}{6}}}$$

eine Majorante von $\Delta(r;\varphi;t;\tau)=\sum d_{n\mu}$. Da diese Majorante konvergiert, konvergiert $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$ absolut und gleichmäßig.

Daraus folgt, daß bei der Berechnung von

$$\delta(r;\varphi;t)=\int_{t_0}^{t}\Delta(r;\varphi;t;\tau)\,d\tau$$

die Reihe für $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$ gliedweise nach τ integriert werden darf, so daß

$$\delta(r;\varphi;t)=-2R\sum\sum\frac{J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)}{J_{qn}(\Lambda_\mu(qn))\cdot(\Lambda_\mu^2+\zeta^2R^2-(qn)^2)}\times$$

$$\times\left(\cos n\varphi\int_{t_0}^{t}A_n'(\tau)\cdot e^{-\frac{(t-\tau)\cdot\Lambda_\mu^2(qn)}{kR^2}}\,d\tau+\sin n\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}B_n'(\tau)\cdot e^{\frac{(t-\tau)\cdot\Lambda_\mu^2(qn)}{kR^2}}\,d\tau\right)$$

gesetzt werden kann.

Nach (121) ist

$$\left|\int_{t_0}^{t}A_n'(\tau)\cdot e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda^2}{kR^2}}\,d\tau\right|<\frac{M}{(n+1)^3}\cdot\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{(t-\tau)\cdot\Lambda^2}{kR^2}}\,d\tau$$

$$=\frac{MkR^2}{(n+1)^3\cdot\Lambda^2}\left(1-e^{-\frac{(t-t_0)\Lambda^2}{kR^2}}\right)<\frac{Mk\cdot R^2}{(n+1)^3\Lambda^2}.$$

Ebenso gilt:

$$\left|\int_{t_0}^{t}B_n'(\tau)\,e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda^2}{kR^2}}\,d\tau\right|<\frac{MkR^2}{(n+1)^3\Lambda^2}.$$

Aus den Ungleichungen (119a), (119c) und (119d) kann man schließen, daß

$$\Lambda_\mu(qn)>c_2\cdot(qn+\mu),\quad\text{wobei}\quad c_2>0,$$

für alle Wertepaare $(n;\mu)$ außer wenn $(\mu;n)=(1;0)$ und wenn gleichzeitig $\mu=1$ und $qn<-2\zeta R$ ist.

Es ist also bei geeigneter Wahl von $C_3>0$ die Reihe

$$(124)\qquad C_3\cdot\sum\sum\frac{1}{(n+1)^3(qn+\mu)^{2+\frac{2}{3}}\mu^{\frac{5}{6}}}<C_3\sum\frac{1}{(n+1)^3}\cdot\sum\frac{1}{\mu^{3+\frac{1}{2}}}$$

eine Majorante von $\delta(r;\varphi;t)$.

Differenziert man $\delta(r;\varphi;t)$ einmal bzw. zweimal gliedweise nach r, so tritt an Stelle von $J_{qn}\left(\frac{r}{R}\cdot\Lambda\right)$ jeweils $\frac{\Lambda}{R}\cdot J_{qn}'\left(\frac{r}{R}\cdot\Lambda\right)$ bzw. $J_{qn}''\left(\Lambda\frac{r}{R}\right)\cdot\frac{\Lambda^2}{R^2}$. Nun ist nach (79) und (123)

$$\left|\frac{\Lambda}{R}\cdot J_{qn}'\left(\Lambda\frac{r}{R}\right)\right|=\left|\frac{\Lambda}{R}\cdot\left(\frac{qn}{\Lambda\frac{r}{R}}J_{qn}-J_{qn+1}\right)\right|<$$

$$<\left(\frac{qn}{r}+\frac{\Lambda}{R}\right)K<c_3\frac{\Lambda}{r}\cdot K,\quad\text{wobei}\quad c_3>0.$$

Analog erhält man:

$$\left|\frac{\Lambda^2}{R^2}\cdot J''_{qn}\left(\Lambda\frac{r}{R}\right)\right| = \left|\frac{\Lambda^2}{R^2}\left(\left(\frac{(qn)^2}{\Lambda^2\frac{r^2}{R^2}}-1\right)\cdot J_{qn}\left(\Lambda\frac{r}{R}\right)-\frac{1}{\Lambda\frac{r}{R}}\cdot J'_{qn}\right)\right|$$

$$< c_4\cdot\frac{\Lambda^2}{r^2}\cdot K, \quad \text{wobei} \quad c_4>0.$$

Das heißt: Für die einmal bzw. zweimal gliedweise nach r differenzierte Reihe $\delta(r;\varphi;t)$ ist

$$\frac{C_4}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^{\frac{5}{2}}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{C_5}{r^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}$$

eine Majorante. Da diese Majoranten für $r\geqq r_0$, wobei $r_0>0$ sein muß, aber beliebig nahe an 0 liegen darf, gleichmäßig konvergieren, konvergieren die gliedweise differenzierten Reihen für $r\geqq r_0$ absolut und gleichmäßig.

Differenziert man die Reihe für $\delta(r;\varphi;t)$ gliedweise zweimal nach φ, so multiplizieren sich die einzelnen Glieder mit $-n^2$ und nach (124) ist

$$\frac{C_3}{q^2}\sum\sum\frac{1}{(n+1)^3}\cdot\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}$$

eine Majorante.

Differenziert man die $\delta(r;\varphi;t)$-Reihe gliedweise nach t, so erhält man aus der Ungleichung

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t}A'_n(\tau)\,e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda^2}{kR^2}}d\tau\right| = \left|A'_n(t)-\frac{\Lambda^2}{kR^2}\cdot\int_{t_0}^{t}A'_n(\tau)\,e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda^2}{kR^2}}d\tau\right|$$

$$\leqq\frac{M}{(n+1)^3}+\frac{\Lambda^2}{kR^2}\cdot\frac{MkR^2}{(n+1)^3\Lambda^2}=\frac{2M}{(n+1)^3},$$

daß die Reihe

$$C_6\sum\sum\frac{(qn+\mu)^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu(qn+\mu)\cdot(n+1)^3}<C_6\sum\sum\frac{1}{(n+1)^3\mu^{\frac{3}{2}}}$$

eine Majorante ist.

Damit ist gezeigt, daß man für $r>0$ die Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ von $\delta(r;\varphi;t)$ und $g(r;\varphi;t)$ erhält, indem man die Reihen gliedweise differenziert. Aus den Entwicklungen von Kap. I ergibt sich aber, daß die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt sind, wenn die gliedweise Differentiation gestattet ist und die Reihenglieder umgeordnet werden dürfen; dies ist aber wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz gestattet.

Kap. IV. $S(\varphi;t)$ und $f(r;\varphi;t)$ sollen für $-\infty<t<\infty$ periodische Funktionen von t sein.

A. Um unser Ergebnis (22) auf periodische Funktionen $S(\varphi;t)$ übertragen zu können, wollen wir es zunächst etwas erweitern, indem wir folgende Randwertaufgabe stellen.

Die Funktion $f_1(r;\varphi;t)$ soll folgenden Gleichungen genügen:

(125) 1. $$r^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}+r\frac{\partial f_1}{\partial r}+q^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi^2}=r^2 k\cdot\frac{\partial f_1}{\partial t}.$$

(126) 2. für $r=0$ soll $f_1(0;\varphi;t)$ endlich und $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}=0$ sein.

(127) 3. für $r=R$ soll $\zeta f_1+\frac{\partial f_1}{\partial r}=S_1(\varphi;t)$ sein.

Dabei sei $S_1(\varphi;t)$ eine stetige Funktion von φ und t und eine periodische Funktion von φ. Ferner sei

(128) a) für $t\leq t_0$ $\quad S_1(\varphi;t)=S_1(\varphi;t_0)$.

b) Es soll $S_1(\varphi;t)$ dieselben Voraussetzungen (17) erfüllen, die in Kap. II für $S(\varphi;t)$ gemacht wurden, so daß wir

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}=H(\varphi;t) \quad \text{und} \quad S_1(\varphi;t)=S_1(\varphi;t_0)+\int_{t_0}^{t}H(\varphi;\tau)\,d\tau$$

setzen können.

(129) 4. für $t\leq t_0$ sei $f_1(r;\varphi;t)$ von t unabhängig.

Wir bestimmen zunächst eine Funktion $h(r;\varphi)$ aus folgenden Gleichungen:

(130) 1. $$r^2\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+r\frac{\partial h}{\partial r}+q^2\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}=0;$$

(131) 2. für $r=0$ sei $h(r;\varphi)$ endlich und $\frac{\partial h}{\partial \varphi}=0$;

(132) 3. für $r=R$ soll $\zeta\cdot h+\frac{\partial h}{\partial r}=S_1(\varphi;t_0)$ sein.

Setzen wir nun:

(133) $$f_1(r;\varphi;t)-h(r;\varphi)=f(r;\varphi;t); \qquad S_1(\varphi;t)-S_1(\varphi;t_0)=S(\varphi;t),$$

so gelten für $f(r;\varphi;t)$ und $S(\varphi;t)$ die Bedingungen (17), (18), (20) und (21). Eine Lösung für $f(r;\varphi;t)$ erhält man also aus (22).

Entwickeln wir $S_1(\varphi;t_0)$ in eine FOURIERsche Reihe

(134) $$S_1(\varphi;t_0)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha_\nu\cos\nu\varphi+\beta_\nu\sin\nu\varphi),$$

so erhalten wir

(135) $$h(r;\varphi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\vartheta_\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^{q\nu}(\alpha_\nu\cos\nu\varphi+\beta_\nu\cdot\sin\nu\varphi).$$

Setzen wir in die Beziehung

$$f_1(r;\varphi;t)=h(r;\varphi)+f(r;\varphi;t)$$

den Wert für $f(r;\varphi;t)$ aus (22) ein, so erhalten wir:

(136) $$f_1(r;\varphi;t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\vartheta_\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^{q\nu}\cdot\left((\alpha_\nu+A_\nu(t))\cos\nu\varphi+(\beta_\nu+B_\nu(t))\sin\nu\varphi\right)$$
$$-2R\sum\sum\cdots.$$

Nun ist für $t \geqq t_0$

$$(137)\quad S_1(\varphi;t) = S(\varphi;t) + S_1(\varphi;t_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [(\alpha_\nu + A_\nu(t)) \cos \nu\varphi + (\beta_\nu + B_\nu(t)) \sin \nu\varphi] .$$

Bezeichnen wir die erste $\sum$ in (136) mit $g_1(r;\varphi;t)$ also

$$g_1(r;\varphi;t) = \sum \frac{1}{\vartheta_\nu} \left(\frac{r}{R}\right)^{q\nu} [(\alpha_\nu + A_\nu(t)) \cos \nu\varphi + (\beta_\nu + B_\nu(t)) \sin \nu\varphi] ,$$

so ist $g_1(r;\varphi;t)$ die zu $f_1(r;\varphi;t)$ gehörige stationäre Lösung. Sie erfüllt nämlich die Differentialgleichung

$$(138)\qquad r^2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial g_1}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial \varphi^2} = 0$$

mit den Randbedingungen

$$(139)\quad \begin{cases} \text{a) für } r = 0 \text{ ist } g_1(0;\varphi) \text{ endlich und } \dfrac{\partial g_1}{\partial \varphi} = 0; \\ \text{b) für } r = R \text{ ist } \zeta \cdot g_1 + \dfrac{\partial g_1}{\partial r} = S_1(\varphi;t) \end{cases}$$

mit t als Parameter.

Unsere Formel (22) gilt also auch, wenn die Randbedingungen (18) und (21; 1) durch (128 a) und (129) ersetzt werden.

B. Die Randwertaufgabe (125) bis (129) wollen wir nun spezialisieren, indem wir von $S_1(\varphi;t)$ voraussetzen, daß es für $t \geqq t_0$ auch in t eine periodische Funktion ist mit der Periode $2\pi/\omega$. Da die $A'_\nu(\tau)$ und $B'_\nu(\tau)$ nun periodisch sind, ist in (22) die Integration nach $d\tau$ explizit durchführbar. Nachträglich erweitern wir den Periodizitätsbereich von $S_1(\varphi;t)$ nach negativen Werten von t, indem wir $t_0 \to -\infty$ gehen lassen.

Für $t \geqq t_0$ gilt:

$$(140)\quad \begin{cases} \alpha_\nu + A_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{\nu n} \cos n\omega t + \beta_{\nu n} \cdot \sin n\omega t) , \\ \beta_\nu + B_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_{\nu n} \cos n\omega t + \delta_{\nu n} \cdot \sin n\omega t) \end{cases}$$

und also

$$(141)\quad \begin{cases} A'_\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n\omega \beta_{\nu n} \cos n\omega t - n\omega \alpha_{\nu n} \sin n\omega t) , \\ B'_\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n\omega \delta_{\nu n} \cos n\omega t - n\omega \gamma_{\nu n} \sin n\omega t) . \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (22) ein und integriert man gliedweise, so erhält man lauter Integrale vom Typus:

$$(142)\quad \begin{cases} \int_{t_0}^{t} \cos b\tau \cdot e^{-a(t-\tau)}\, d\tau \\ \qquad = \dfrac{1}{a^2 + b^2} [(a \cos bt + b \sin bt) - e^{-a(t-t_0)} (a \cos bt_0 + b \sin bt_0)] ; \\ \int_{t_0}^{t} \sin b\tau \cdot e^{-a(t-\tau)}\, d\tau \\ \qquad = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \cdot [(a \sin bt - b \cos bt) - e^{-a(t-t_0)} (a \cdot \sin bt_0 - b \cdot \cos bt_0)] . \end{cases}$$

Läßt man nun $t_0 \to -\infty$ gehen, so wird

$$(143)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \cos b\,\tau\, e^{-a(t-\tau)}\,d\tau = \frac{1}{a^2+b^2}\,(a\cos b\,t + b\cdot \sin b\,t)\,; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \sin b\,\tau\cdot e^{-a(t-\tau)}\,d\tau = \frac{1}{a^2+b^2}\,(a\cdot \sin b\,t - b\cdot \cos b\,t)\,, \end{cases}$$

und zwar konvergieren die Ausdrücke $\frac{|a|+|b|}{a^2+b^2}\,e^{-a(t-t_0)}$ für sämtliche bei uns vorkommende Wertepaare (a, b) *gleichmäßig* nach 0, wenn $\zeta R > 0$.

Um das Resultat in einer übersichtlichen Form zu erhalten, benützen wir die Abkürzungen (13) bis (16) und erhalten mittels (141) und (143) aus (22) die Gl. (24).

Literatur.

[1] Bieberbach: Differentialgleichungen. Berlin 1930. — [2] Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. I. Berlin 1931. — [3] Forster: Über das asymptotische Verhalten der Besselschen Funktionen. Math. Z. **54**, 217—253 (1951). — [4] Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen. Leipzig 1948. — [5] Magnus-Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin 1943. — [6] Sommerfeld: Partielle Differentialgleichungen der Physik. Leipzig 1947. — [7] Watson: A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1922.

München, Loristr. 30.

(Eingegangen am 1. Oktober 1952.)

THIMM, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 456—480 (1953)

Über die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung.

Von
WALTER THIMM.

Einleitung.

Es werden Abbildungen analytischer Mannigfaltigkeiten durch meromorphe Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen untersucht. Bei solchen meromorphen Abbildungen gibt es Punkte — sog. Unbestimmtheitspunkte —, denen höher als 0-dimensionale Bildpunktmengen entsprechen. Wir nennen die Bildpunkte eines Unbestimmtheitspunktes singulär. Das Problem, die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung zu untersuchen, hat bereits eine längere Geschichte. AUTONNE behandelte in mehreren Arbeiten den Fall eines einzelnen Unbestimmtheitspunktes. In seiner Arbeit [1][1]) behauptet er, daß die Menge der singulären Bildpunkte eines Unbestimmtheitspunktes algebraisch sei. Seine Beweise sind jedoch völlig unzureichend. Später tauchte das Problem in Arbeiten auf, die zum Ziele haben, einen lückenhaften Beweis von POINCARÉ über den WEIERSTRASSschen Satz, daß zwischen $n+1$ meromorphen $2n$-fach periodischen Funktionen von n Variablen eine algebraische Relation besteht, zu vervollständigen und diesen Satz zu verallgemeinern. Hierher gehören Arbeiten von BLUMENTHAL [2], OSGOOD ([3], S. 603) und des Verfassers [9]. Alle diese Arbeiten geben jedoch keine Lösung des Problems. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem für einen einzelnen Unbestimmtheitspunkt behandelt. Es wird die Vermutung von AUTONNE bewiesen. Über dieses Ergebnis hinaus wird die Struktur der Menge der singulären Bildpunkte eines Unbestimmtheitspunktes aufgeklärt. Es zeigt sich[2]), daß alle singulären Bildpunkte eines Unbestimmtheitspunktes mittels endlich vieler Systeme von Polynomen

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r \qquad (\lambda = 1, \ldots, n),$$

in der Weise erhalten werden, daß die x_λ in die Abbildungsgleichungen eingesetzt werden und danach der Grenzübergang $t \to 0$ ausgeführt wird; dabei sind $a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, \ldots, a_{\lambda r}$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ als Variable aufzufassen, die noch bestimmten algebraischen Gleichungen genügen. Die Untersuchungsmethode legt es nahe, die betrachtete meromorphe Abbildung zu gewissen rationalen Abbildungen in Beziehung zu setzen. Daraus fließt eine Reihe von Sätzen

[1]) Vgl. Literaturverzeichnis.

[2]) Vgl. Hauptsatz, Nr. 8.7.

über gemeinsame singuläre Bildpunkte der meromorphen und rationalen Abbildungen. Bei der Ableitung der geschilderten Sätze wird als Raum der Bildpunkte der Raum der Funktionentheorie vorausgesetzt; zum Schluß wird gezeigt, daß die Ergebnisse richtig bleiben, wenn statt dessen der projektive Raum genommen wird.

§ 1. Singuläre Bildpunkte.

1.1. O sei der Punkt des $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x)_n$-Raumes mit den Koordinaten $x_\nu = 0$. Δ sei eine — nicht notwendig irreduzible — analytische Mannigfaltigkeit mit den Gleichungen

$$\varphi_\nu(x)_n = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N); \tag{1}$$

φ_ν sei analytisch in O.

Die im Punkte O meromorphen Funktionen

$$z_j = \frac{\mathfrak{p}_j(x)_n}{q_j(x)_n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{2}$$

($\mathfrak{p}_j$, q_j analytisch in O) bestimmen eine meromorphe Abbildung der Umgebung von O in den $(z)_k$-Raum. Dieser letztere Raum sei der k-dimensionale Raum der Funktionentheorie. Wir setzen überdies voraus:

a) $\mathfrak{p}_j(0)_n = q_j(0)_n = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

b) $|\mathfrak{p}_j| + |q_j|$ verschwinde für keinen Wert von j auf den isolierten irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten von Δ identisch.

Fernerhin betrachten wir die meromorphe Abbildung (2) lediglich auf Δ und bezeichnen sie als Abbildung von Δ mit $A_k(\Delta)$.

1.2. Definition I. Es sei $A_k(\Delta)$ eine meromorphe Abbildung. Der Punkt (x^0) von Δ heiße *Unbestimmtheitspunkt* von $A_k(\Delta)$, wenn in (x^0) für einen Wert von j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ gleichzeitig $\mathfrak{p}_j(x^0)$ und $q_j(x^0)$ verschwinden.

Die Unbestimmtheitspunkte von $A_k(\Delta)$ erfüllen eine analytische Mannigfaltigkeit, die durch die Lösung der k Gleichungssysteme $(j = 1, 2, \ldots, k)$

$$\varphi_\nu(x)_n = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\mathfrak{p}_j(x)_n = q_j(x)_n = 0$$

erhalten wird.

1.3. Definition II. $A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. Der Punkt $Q = (\zeta)_k$ des $(z)_k$-Raumes heiße *singulärer Bildpunkt* von $A_k(\Delta)$, wenn es eine gegen Q strebende Folge von Bildpunkten von $A_k(\Delta)$ gibt, welche Urbilder auf Δ besitzen, die keine Unbestimmtheitspunkte sind und gegen den Unbestimmtheitspunkt (ξ) von $A_k(\Delta)$ streben. Der Punkt $\{(\xi), (\zeta)\}$ des $\{x, z\}$-Raumes werde als singuläres Punktepaar bezeichnet. Ferner heiße (ζ) singulärer Bildpunkt des Unbestimmtheitspunktes (ξ).

1.4. In dieser Arbeit wird die Menge der singulären Bildpunkte des Nullpunktes 0 untersucht. Den — an sich notwendigen — Zusatz: „des Punktes 0" lassen wir im folgenden weg, da Mißverständnisse nicht zu befürchten sind.

§ 2. Lokale Eigenschaften der Menge der singulären Bildpunkte.

2.1. Satz 1. *Es sei $A_k(\Delta)$ eine meromorphe Abbildung. Die Menge der singulären Bildpunkte ist abgeschlossen und daher kompakt.*

Beweis. Der Satz folgt leicht aus der Kompaktheit des z-Raumes und aus Definition II.

2.2. Satz 2. *Es sei $A_k(\Delta)$ eine meromorphe Abbildung. Q sei ein singulärer Bildpunkt. Dann gibt es eine Umgebung $U(Q)$ des Punktes Q und endlich viele im Punkt Q irreduzible analytische Mannigfaltigkeiten*

$$M_1, M_2, \ldots, M_s, \tag{1}$$

die den Punkt Q enthalten, derart, daß jeder singuläre Bildpunkt aus $U(Q)$ zu einer Mannigfaltigkeit M_i gehört.

Jeder Punkt Q' von M_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ ist singulärer Bildpunkt von $A_k(\Delta)$.

Beweis. 1. Wir dürfen voraussetzen, daß $Q = (\zeta)$ ein endlicher Punkt des (z)-Raumes ist. Falls etwa die Koordinate ζ_ν von Q ∞ ist, ersetze man z_ν durch $z'_\nu = 1/z_\nu$.

2. Wir untersuchen die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} \varphi_\nu(x)_n = 0, & \nu = 1, 2, \ldots, N, \quad \text{vgl. Nr. 1.1.} \\ q_j(x)_n z_j - p_j(x)_n = 0, & j = 1, 2, \ldots, k, \end{cases} \tag{2}$$

in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{Q} = \{O, Q\}$. Nach dem zweiten Satz von WEIERSTRASS ([3], S. 104) gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{Q})$ von $\mathfrak{Q}$, derart, daß die Lösungen von (2) in $\mathfrak{U}(\mathfrak{Q})$ zu endlich vielen analytischen Mannigfaltigkeiten gehören, die den Punkt $\mathfrak{Q}$ enthalten und in diesem Punkte irreduzibel sind. Diejenigen unter diesen Mannigfaltigkeiten, auf denen für keinen Wert von j, $j = 1, 2, \ldots, k$, gleichzeitig $p_j(x)$ und $q_j(x)$ identisch verschwinden, seien

$$G_1, G_2, \ldots, G_\sigma. \tag{3}$$

Wir setzen voraus, daß keine Mannigfaltigkeit G_i ganz zu einer höherdimensionalen Mannigfaltigkeit der Reihe (3) gehöre. Es muß wenigstens eine Mannigfaltigkeit G_i geben, deren Dimension ≥ 1 ist, da Q singulärer Bildpunkt ist, also nach Definition II in beliebiger Umgebung von $\mathfrak{Q}$ Punktepaare $\{(x^{(\nu)}), (z^{(\nu)})\}$ liegen, welche den Gln. (2) genügen, ohne daß für einen Wert von j zugleich $p_j(x^{(\nu)})$ und $q_j(x^{(\nu)})$ verschwinden.

3. In die Gleichungen der Mannigfaltigkeiten (3) werde $(x)_n = (0)_n$ eingesetzt. Es gibt eine Umgebung $U(Q)$ von Q, derart, daß die auf $(x)_n = (0)_n$ und in $U(Q)$ liegenden Punkte der G_i zu endlich vielen in Q irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeiten gehören. Wir beweisen, daß $U(Q)$ und diese Mannigfaltigkeiten $M_1, M_2, \ldots, M_s$ die im Satz 2 behaupteten Eigenschaften haben.

4. $Q' = (z')$ sei ein singulärer Bildpunkt in $U(Q)$. Nach Definition II gibt es eine Folge $\mathfrak{Q}^{(\nu)} = \{\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}\}$, die gegen den Punkt $\{O, Q'\}$ konvergiert, derart, daß

a) $\alpha^{(\nu)}$ auf Δ liegt,

b) $\beta_j^{(\nu)} = \frac{p_j(\alpha^{(\nu)})}{q_j(\alpha^{(\nu)})}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ gilt,

c) für keinen Wert von j zugleich $p_j(\alpha^{(\nu)})$ und $q_j(\alpha^{(\nu)})$ verschwinden.

Fast alle Punkte $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ gehören zu $\mathfrak{U}(\mathfrak{Q})$ und liegen daher auf den Mannigfaltigkeiten (3), von denen wenigstens eine unendlich viele Punkte $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ enthalten muß, etwa G_{s_0}. Auch der Grenzpunkt $\{O, Q'\}$ ist dann Punkt von G_{s_0}. Da nun Q' in $U(Q)$ liegt und $\{O, Q'\}$ auch $(x)_n = (0)_n$ befriedigt, muß Q' einer Mannigfaltigkeit (1) angehören.

5. Es sei Q' ein Punkt von M_i in $U(Q)$. Weil M_i im Durchschnitt einer Mannigfaltigkeit G_λ mit $(x)_n = (0)_n$ liegt, gehört $\mathfrak{Q}' = \{O, Q'\}$ wenigstens zu einer Mannigfaltigkeit G_λ. Die Dimension von G_λ ist $\geqq 1$. Wäre diese Dimension nämlich 0, so müßte G_λ der Punkt $\mathfrak{Q} = \{O, Q\}$ sein. Dieser Punkt liegt aber, wie wir in 2. sahen, auf einer Mannigfaltigkeit G_i mit einer Dimension $\geqq 1$. Nach unserer Vereinbarung, nur solche Mannigfaltigkeiten in die Reihe (3) aufzunehmen, die keiner höherdimensionalen Mannigfaltigkeit angehören, kann der Punkt $\mathfrak{Q}$ nicht unter den Mannigfaltigkeiten (3) sein. Da für keinen Wert von j $p_j(x)$ und $q_j(x)$ auf G_λ identisch verschwinden, ist jeder Punkt von G_λ Grenzpunkt einer Folge von solchen Punkten, in denen keines dieser k Funktionenpaare verschwindet. Insbesondere gilt das für den Punkt $\mathfrak{Q}'$. Es gibt also eine Folge von Punkten $\mathfrak{Q}^{(\nu)} = \{(x^{(\nu)}), (z^{(\nu)})\}$, die gegen den Punkt $\mathfrak{Q}'$ streben, die zu G_λ gehören, derart, daß für keinen Wert von j zugleich $p_j(x^{(\nu)})$ und $q_j(x^{(\nu)})$ Null sind. Da diese Punkte zu G_λ gehören, lösen sie das Gleichungssystem (2). Es gilt also

$$z_j^{(\nu)} = \frac{p_j(x^{(\nu)})}{q_j(x^{(\nu)})} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

und die Punkte $(x^{(\nu)})$ liegen auf Δ. Daraus folgt nach Definition II, daß Q' singulärer Bildpunkt ist.

2.3. Aus den obigen Beweisschlüssen ziehen wir noch eine Folgerung von grundlegender Bedeutung für die folgenden Überlegungen.

Satz 3. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung.*

1. *$\gamma = (x(t))_n$ sei eine analytische Kurve mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *γ liege ganz auf Δ, d.h. es gelten: $\varphi_\nu(x(t))_n = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, vgl. Nr. 1.1.*

(b) *Für keinen Wert von j seien $p_j(x(t))$ und $q_j(x(t))$ gleichzeitig identisch Null.*

(c) *$(x(0))_n = (0)_n$.*

Dann existieren die Grenzwerte:

$$\zeta_j = \lim_{t \to 0} \frac{p_j(x(t))}{q_j(x(t))}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Der Punkt $(\zeta)_k$ ist singulärer Bildpunkt.

2. *Jeder singuläre Bildpunkt kann auf die unter 1 beschriebene Weise erhalten werden.*

3. Definition. *Die Kurve γ nennen wir „eine den singulären Bildpunkt $(\zeta)_k$ erzeugende Kurve".*

Beweis. Zu 1. klar. Zu 2. Q sei der singuläre Bildpunkt $(\zeta)_k$. Es sei $\mathfrak{Q} = \{O, Q\}$. Nach dem Beweise von Satz 2 (vgl. Nr. 2.2) gibt es eine Lösungsmannigfaltigkeit G_λ des Gleichungssystems (2), deren Dimension $\geqq 1$ ist, die $\mathfrak{Q}$ enthält, und auf der für keinen Wert von j zugleich $p_j(x)$ und $q_j(x)$ identisch verschwinden. Auf G_λ gibt es daher eine analytische Kurve:

$$x_\mu(t) = t\,x'_\mu(t) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$
$$z_\nu(t) = \zeta_\nu + t\,z'_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

auf der für keinen Wert von j zugleich $p_j(x)$ und $q_j(x)$ identisch Null sind. Da auf dieser Kurve das Gleichungssystem (2) erfüllt ist, folgen:
(a) $(x(t))_n$ liegt auf Δ.

(b) $$\zeta_\nu + t\,z'_\nu(t) = \frac{p_j(x(t))}{q_j(x(t))} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Also ist $\lim\limits_{t \to 0} z_\nu(t) = \zeta_\nu$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

2.4. Definition III. Es sei Q ein singulärer Bildpunkt der meromorphen Abbildung $A_k(\Delta)$. Wenn es eine analytische Kurve $\gamma = (x(t))_n$ gibt, welche Q im Sinne der Definition in Satz 3 erzeugt und auf der keine der $2k$ Funktionen $p_j(x), q_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ identisch verschwindet, heiße Q *von erster Art*. Falls auf jeder, den Punkt Q erzeugenden analytischen Kurve eine dieser $2k$ Funktionen identisch verschwindet, heiße Q *von zweiter Art*.

§ 3. Anfänge von analytischen Kurven.

3.1. Definition IV. Δ sei eine analytische Mannigfaltigkeit, definiert in einer Umgebung von O durch die Gleichungen

(1) $$\varphi_\nu(x)_n = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

$\Gamma(r)$ (r positiv ganz) bezeichne ein System von n Polynomen von t

(2) $$x_\lambda = a_{\lambda 1}t + a_{\lambda 2}t^2 + \cdots + a_{\lambda r}t^r \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem ganzzahligen $\varrho \geqq r$ gebe es ein System von Polynomen

(3) $$y_\lambda^{(\varrho)} = a_{\lambda r+1}^{(\varrho)} + a_{\lambda r+2}^{(\varrho)}t + \cdots + a_{\lambda \varrho}^{(\varrho)}t^{\varrho - r - 1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

derart, daß durch Einsetzen der Polynome

(4) $$x_\lambda = a_{\lambda 1}t + a_{\lambda 2}t^2 + \cdots + a_{\lambda r}t^r + t^{r+1}y_\lambda^{(\varrho)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

in die Funktionen $\varphi_\nu(x)_n$ Potenzreihen von t entstehen, die mindestens durch $t^{\varrho+1}$ teilbar sind.

Dann heiße $\Gamma(r)$ *Anfang einer analytischen Kurve auf* Δ.

3.2. Die analytische Kurve γ liege auf Δ und habe die Gleichungen

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda \mu} t^\mu + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Für jeden Wert von r ($r \geqq 1$) bestimmt das System von n Polynomen

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

den Anfang einer analytischen Kurve auf Δ.

3.3. Die Rechtfertigung der Definition IV liegt in dem folgenden Satz:

Satz 4. *Es sei Δ eine analytische Mannigfaltigkeit. $\Gamma(r)$, $r \geqq 1$, sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ und habe die Gleichungen (2). Dann gibt es eine analytische Kurve γ auf Δ, deren Entwicklung folgendermaßen beschrieben werden kann:*

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r-1} t^{r-1} + x_\lambda^* t^r, \tag{5}$$

$$x_\lambda^* = a_{\lambda r} + \tau \varepsilon_{\lambda 1} + \tau^2 \varepsilon_{\lambda 2} + \cdots + \tau^\mu \varepsilon_{\lambda \mu} + \cdots, \tag{6}$$

$$t = \varepsilon_1 \tau + \varepsilon_2 \tau^2 + \cdots + \varepsilon_\mu \tau^\mu + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Dabei sind (6) und (7) konvergente Potenzreihen von τ. Es ist $t \not\equiv 0$.

Beweis. 1. Wir setzen die Entwicklungen (5) in die Funktionen (1) ein:

$$\varphi_\nu'(t, (x^*)_n) = t^{\sigma_\nu} \psi_\nu(t, (x^*)_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{8}$$

Dabei sei σ_ν so gewählt, daß ψ_ν für $t = 0$ nicht identisch verschwindet.

$$\psi_\nu(t, (x^*)_n) = \psi_{\nu 0}(x^*)_n + \psi_{\nu 1}(x^*)_n \cdot t + \cdots \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{9}$$

Die Funktionen $\psi_{\nu 0}(x^*)_n$ verschwinden für $\{x_\lambda^* = a_{\lambda r}, \lambda = 1, 2, \ldots, n\}$. Setzen wir nämlich

$$x_\lambda^* = a_{\lambda r} + a_{\lambda r+1}^{(\varrho)} t + \cdots + a_{\lambda \varrho}^{(\varrho)} t^\varrho \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

in die Funktionen (8) ein, so beginnen nach Definition IV die entstehenden t-Entwicklungen mindestens mit $t^{\varrho - 1}$, also mit einer beliebig hohen Potenz von t, wenn nur ϱ hinreichend groß gewählt wird. Dieselbe Eigenschaft haben auch die Funktionen (9), woraus ihr Verschwinden für $\{x_\lambda^* = a_{\lambda r}, \lambda = 1, 2, \ldots, n, t = 0\}$ folgt.

2. Wir setzen

$$y_\lambda^* = x_\lambda^* - a_{\lambda r} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

in die Funktionen (9) ein und erhalten die Funktionen

$$\psi_\nu(t, (y^*)_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{12}$$

welche den Relationen

$$\psi_\nu(0, (0)_n) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{13}$$

genügen. Auf die Funktionen (12) wenden wir im Punkte $\{t = 0, (y^*)_n = (0)_n\}$ den Weierstrassschen Vorbereitungssatz an, nachdem wir, falls erforderlich,

die Variablen $(y^*)_n$ einer linearen Transformation unterworfen haben, die also t nicht berührt. Das ist möglich, weil ψ_ν für $t=0$ nicht identisch verschwindet. Wir sehen jedoch davon ab, für die neuen Variablen neue Bezeichnungen einzuführen. Es ist

$$(14) \qquad \psi_\nu\left(t, (y^*)_n\right) = \psi'_\nu\left(y_n^*/t, (y^*)_{n-1}\right) \cdot \psi''_\nu\left(t, (y^*)_n\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

wobei $\psi''_\nu\left(0, (0)_n\right) \neq 0$ und ψ'_ν ein ausgezeichnetes Pseudopolynom von y_n^* mit der Spitze im Punkte $\{t=0, (y^*)_{n-1} = (0)_{n-1}\}$ ist. Die t-Entwicklungen der Funktionen ψ'_ν beginnen mit einer beliebig hohen Potenz von t, wenn wir für die y_λ^* die folgenden Entwicklungen einsetzen:

$$(15) \qquad y_\lambda^* = t\, y_\lambda^{(\varrho)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

[vgl. Definition IV (3)] und dabei ϱ hinreichend groß wählen.

3. Es handelt sich um die Lösung des Gleichungssystems

$$(16) \qquad \psi'_\nu(y_n^*/t, (y^*)_{n-1}) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) Die Polynome ψ'_ν haben im Punkte $\{t=0, (y^*)_{n-1} = (0)_{n-1}\}$ einen gemeinsamen Teiler: $\delta\left(y_n^*/t, (y^*)_{n-1}\right)$. Dann sei $(y^*)_{n-1} = \left(y^*(t)\right)_{n-1}$ eine beliebige analytische Kurve durch den Punkt $(0)_{n-1}$. Setzen wir diese (konvergenten!) t-Entwicklungen in δ ein, so können wir aus der Gleichung

$$(17) \qquad \delta\left(y_n^*/t, (y^*(t))_{n-1}\right) = 0$$

y_n^* und t durch eine oder mehrere PUISEUX-Entwicklungen der Gestalten (6) und (7) berechnen, für welche überdies $t \not\equiv 0$ gilt. Damit ist in diesem Falle Satz 4 bewiesen.

(b) Die Polynome ψ'_ν haben keinen gemeinsamen Teiler. Dann bilden wir das KRONECKERsche Resultantensystem der ψ'_ν bezüglich der Variablen y_n^* und erhalten ein Funktionensystem

$$(18) \qquad \chi_\nu\left(t, (y^*)_{n-1}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N_1).$$

Die Funktionen χ_ν sind Linearkombinationen der ψ'_ν mit Koeffizienten, die Polynome der Variablen y_n^* und der Koeffizienten der Polynome ψ'_ν sind (vgl. [6], S. 56). Setzen wir also in die Funktionen χ_ν für $(y^*)_{n-1}$ die Entwicklungen (15) (bei $\lambda = 1, 2, \ldots, n-1$) ein, so beginnen die entstehenden t-Entwicklungen mit beliebig hohen Potenzen von t, wenn nur ϱ hinreichend groß gewählt wird.

4. Es sei

$$\chi_\nu\left(t, (y^*)_{n-1}\right) = t^{\sigma_\nu} \chi'_\nu\left(t, (y^*)_{n-1}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N_1),$$

wobei σ_ν so bestimmt sei, daß χ'_ν für $t=0$ nicht identisch verschwindet. Auch die t-Entwicklungen der χ'_ν beginnen mit beliebig hohen Potenzen von t, wenn (15) eingesetzt wird und nur ϱ genügend groß ist. Daraus folgt, daß die Funktionen χ'_ν für $\{t=0, (y^*)_{n-1} = (0)_{n-1}\}$ verschwinden. Wir wenden

auf sie in diesem Punkte den Weierstrassschen Vorbereitungssatz an, wobei wir uns eine eventuell erforderliche lineare Transformation der $(y^*)_{n-1}$ schon ausgeführt denken.

$$(19)\qquad \begin{cases} \chi_\nu'(t, (y^*)_{n\ 1}) = \chi_\nu''(y_n^*{}_1 t, (y^*)_{n\ 2}) \cdot \chi_\nu'''(t, (y^*)_{n\ 1}), \\ \chi_\nu'''(0, (0)_{n\ 1}) \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N_1). \end{cases}$$

Die t-Entwicklungen der Polynome χ_ν'' beginnen mit beliebig hohen Potenzen von t, wenn (15) eingesetzt wird und ϱ genügend groß gewählt wurde.

5. Es bestehen wieder die in 3. genannten Möglichkeiten (a) und (b).

(a) Wenn die Polynome χ_ν'' einen gemeinsamen Teiler $\delta(y_{n-1}^*/t, (y^*)_{n-2})$ haben, besitzen die Gln. (16) eine Lösungsmannigfaltigkeit, die durch zwei Gleichungen:

$$\Delta_1(y_n^*/t, (y^*)_{n-1}) = 0, \qquad \Delta_2(y_{n-1}^*/t, (y^*)_{n-2}) = 0$$

bestimmt werden kann. Setzen wir in sie für $(y^*)_{n\ 2}$ konvergente t-Entwicklungen $(y^*)_{n-2} = (y^*(t))_{n\ 2}$ ein, so können y_{n-1}^*, y_n^* und t durch Puiseux-Entwicklungen (6) und (7) so bestimmt werden, daß die berechnete analytische Kurve auf der Mannigfaltigkeit von $n-2$-Dimension liegt. Damit ist in diesem Falle Satz 4 bewiesen.

(b) Wenn die Funktionen χ_ν'' keinen gemeinsamen Teiler besitzen, wird für sie die Schlußweise, die soeben an den ψ_ν' durchgeführt wurde, wiederholt. Falls bei der fortschreitenden Elimination niemals Fall (a) vorkommt, kommen wir nach $n-1$ Schritten zu einem Gleichungssystem:

$$(20)\qquad \omega_\nu(y_1^*/t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N').$$

Dabei sind die ω_ν ausgezeichnete Pseudopolynome von y_1^* mit der Spitze im Punkte $t = 0$. Ersetzen wir y_1^* in ω_ν durch die entsprechende Reihe (15), so beginnt die entstehende t-Entwicklung mit einer beliebig hohen Potenz von t, wenn nur ϱ groß genug ist. Das Resultantensystem der Polynome ω_ν ist ein System von Funktionen $\vartheta_\nu(t)$. Da diese Funktionen auch mit beliebig hohen Potenzen von t beginnen, sind sie $\equiv 0$. Daher haben die Polynome (20) einen gemeinsamen Teiler im Punkte $\{t = 0, y_1^* = 0\}$. Es gibt also eine analytische Kurve mit einer Puiseux-Entwicklung, die allen Gln. (20) genügt, woraus sich eine solche bestimmen läßt, die das System (16) befriedigt. Damit ist Satz 4 bewiesen.

§ 4. Formale singuläre Bildpunkte.

4.1. Definition V. $A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. $\Gamma(r)$ sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ; es sei $r \geq 1$. Setzen wir die Entwicklungen von $\Gamma(r)$ in die Funktionen $p_j(x)$, $q_j(x)$ ein, so entsteht

$$(1)\qquad \begin{cases} p_j' = t^{\alpha_j}(c_{j0} + c_{j1} t + \cdots), & c_{j0} \neq 0 \\ q_j' = t^{\beta_j}(d_{j0} + d_{j1} t + \cdots), & d_{j0} \neq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \end{cases}$$

Wir setzen über $\Gamma(r)$ außerdem voraus, daß alle Zahlen α_j und $\beta_j \leqq r$ seien. Dann definieren wir:

(a) Falls $\alpha_j > \beta_j$ ist, sei $\zeta_j = 0$,

(b) falls $\alpha_j = \beta_j$ ist, sei $\zeta_j = \frac{c_{j0}}{d_{j0}}$,

(c) falls $\alpha_j < \beta_j$ ist, sei $\zeta_j = \infty$.

Den Punkt mit den Koordinaten $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k)$ bezeichnen wir als *formalen singulären Bildpunkt* und sagen: $(\zeta)_k$ *wird durch* $\Gamma(r)$ *erzeugt*. Die größte unter den Zahlen α_j, β_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ werde *Exponent des formalen singulären Bildpunktes* $(\zeta)_k$ [*bezüglich* $\Gamma(r)$] genannt. Dieser Exponent ist $\leqq r$. Wenn es erforderlich ist, den Unterschied der hier eingeführten Begriffe zu den später definierten Begriffen des formalen singulären Bildpunktes und des Exponenten 2. Art hervorzuheben, sollen die obigen Begriffe *von 1. Art* genannt werden.

4.2. Der Punkt Q sei ein singulärer Bildpunkt 1. Art von $A_k(\Delta)$ (vgl. Definition III). γ sei eine Q erzeugende Kurve. Auf γ sei keine Funktion p_j, q_j identisch Null. Setzen wir die Entwicklungen von γ

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda \mu} t^\mu + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

in die Funktionen p_j, q_j ein, so entstehen Potenzreihen

$$p_j(t) = t^{\mu_j}(c_{j0} + c_{j1} t + \cdots),$$
$$q_j(t) = t^{\nu_j}(d_{j0} + d_{j1} t + \cdots) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

für welche stets $c_{j0} d_{j0} \neq 0$ ist. Wie aus den Formeln in Satz 3 folgt, berechnen sich die Koordinaten von Q nach den Vorschriften (a), (b), (c) in Definition V. Die größte der Zahlen μ_j, ν_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ sei ϱ. Nach Abschnitt 3.2 bestimmt das System von n Polynomen

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

den Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ. Wird $r \geqq \varrho$ gewählt, so ist Q formaler singulärer Bildpunkt und wird durch $\Gamma(r)$ erzeugt. Ein Exponent von Q ist ϱ. Daraus folgt

Satz 5. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. Q sei ein singulärer Bildpunkt 1. Art von $A_k(\Delta)$. Dann ist Q formaler singulärer Bildpunkt von $A_k(\Delta)$ und besitzt als solcher einen (endlichen) Exponenten.*

Bemerkung. Die Zuordnung der Exponenten ist keineswegs eindeutig. Man ersetze in den Entwicklungen von γ t durch t^m, wenn m eine positive ganze Zahl ist; dadurch wird der Exponent mit m multipliziert.

4.3. Wir beweisen die Umkehrung von Satz 5:

Satz 6. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. $(\zeta)_k$ sei ein formaler singulärer Bildpunkt und werde durch $\Gamma(r)$ erzeugt (vgl. Definition V). Dann gibt es eine analytische Kurve γ durch den Punkt 0, die $(\zeta)_k$ im Sinne der Definition*

in Satz 3 erzeugt, so daß $(\zeta)_k$ *singulärer Bildpunkt im Sinne der Definition II ist.* $(\zeta)_k$ *ist außerdem von 1. Art (vgl. Definition III).*

Beweis. 1. Wir bestimmen zum Anfang $\Gamma(r)$ nach Satz 4 eine analytische Kurve γ auf Δ, deren Entwicklung durch die Formeln (5), (6), (7) von Nr. 3.3 gegeben wird. Setzen wir die Entwicklungen (5), (6) in eine Funktion $p_j(x)$ ein, so erhalten wir eine Entwicklung nach t und τ

$$p_j' = p_j(t, \tau), \tag{2}$$

die in der Umgebung von $t=0$, $\tau=0$ konvergiert. Entwickeln wir nach Potenzen von t, so wird

$$p_j'(t,\tau) = t^{\alpha_j}(c_{j0} + \tau c_{j0}^1 + \cdots) + t^{\alpha_j+1}(c_{j1} + \tau c_{j1}^1 + \cdots) + \cdots, \qquad c_{j0} \neq 0. \tag{3}$$

Dabei sind α_j und c_{j0} dieselben Zahlen, die nach Einsetzen der Entwicklungen von $\Gamma(r)$ in p_j an diesen Stellen stehen, denn es ist $\alpha_j \leqq r$ (vgl. Definition V), und die auf t^r folgenden höheren Glieder der Entwicklungen (5), (6) können die Koeffizienten der t-Potenzen mit einem Exponenten $\leqq r$ in der Entwicklung (3) nicht mehr beeinflussen. Dann sei nach (7)

$$t = \varepsilon_\varrho \tau^\varrho + \varepsilon_{\varrho+1}\tau^{\varrho+1} + \cdots, \qquad \varepsilon_\varrho \neq 0. \tag{4}$$

Setzen wir auch noch (4) in (3) ein, so erhalten wir

$$\bar{p}_j(\tau) = \tau^{\alpha_j'}(c_{j0}' + \tau c_{j1}' + \cdots), \qquad c_{j0}' \neq 0. \tag{5}$$

Dabei ist offenbar

$$\alpha_j' = \varrho\,\alpha_j, \qquad c_{j0}' = c_{j0}\varepsilon_\varrho^{\alpha_j}. \tag{6}$$

Entsprechend berechnen sich die Zahlen β_j' und d_{j0}' durch Einsetzen von (5), (6), (7) in die Funktion $q_j(x)$.

$$\begin{cases} \bar{q}_j(\tau) = \tau^{\beta_j'}(d_{j0}' + \tau d_{j1}' + \cdots), & d_{j0}' \neq 0, \\ \beta_j' = \varrho\,\beta_j, \qquad d_{j0}' = d_{j0}\varepsilon_\varrho^{\beta_j}. \end{cases} \tag{7}$$

Da alle Zahlen α_j', β_j' $(j = 1, 2, \ldots, k)$ endlich sind, verschwindet keine Funktion $\bar{p}_j(\tau)$, $\bar{q}_j(\tau)$ identisch.

2. Wir beachten jetzt die drei Fälle in Definition V:

(a) Aus $\alpha_j > \beta_j$ folgt $\alpha_j' > \beta_j'$. Dann ist nach Definition II

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{p_j(x(\tau))}{q_j(x(\tau))} = 0 \text{ und nach Definition V } \zeta_j = 0.$$

(b) Aus $\alpha_j = \beta_j$ folgt $\alpha_j' = \beta_j'$. Dann ist nach Definition II

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{p_j(x(\tau))}{q_j(x(\tau))} = \frac{c_{j0}'}{d_{j0}'} = \frac{c_{j0}}{d_{j0}}, \text{ und nach Definition V ist } \zeta_j = \frac{c_{j0}}{d_{j0}}.$$

(c) Aus $\alpha_j < \beta_j$ folgt $\alpha_j' < \beta_j'$. Dann ist nach Definition II

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{p_j(x(\tau))}{q_j(x(\tau))} = \infty, \text{ und nach Definition V ist } \zeta_j = \infty.$$

Die Kurve γ erzeugt also den singulären Bildpunkt $(\zeta)_k$.

4.4. Aufgabe. Es sei Δ eine (nicht notwendig irreduzible) analytische Mannigfaltigkeit mit den Gleichungen

$$\varphi_\nu(x_n) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N, \quad \varphi_\nu \text{ analytisch in } 0. \tag{8}$$

r sei eine positive ganze Zahl $\geqq 1$. Es sind die Anfänge $\Gamma(r)$ der auf Δ liegenden analytischen Kurven zu berechnen.

§ 5. Ein Eliminationssatz.

5.1. Die folgenden Überlegungen beruhen auf einem Eliminationssatz der Algebra.

Hilfssatz. *Es sei*

$$F_m(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, M) \tag{1}$$

ein Gleichungssystem der folgenden Art: Die Funktionen F_m seien Polynome der $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit Koeffizienten aus einem Ring R, der den Körper der komplexen Zahlen umfasse und homomorphe Abbildungen auf den Körper der komplexen Zahlen zulasse. Dann gibt es ein „Ausnahmeideal" $\mathfrak{i}$ in R und ein „Resultantenideal" $\mathfrak{r}$ in R mit folgenden Eigenschaften: Es sei eine homomorphe Abbildung von R auf den Körper der komplexen Zahlen gegeben, welche $\mathfrak{r}$ auf 0 aber $\mathfrak{i}$ nicht auf 0 abbildet. Sie transformiere das System $\{F_m\}$ in das System $\{\overline{F}_m\}$. Dann besitzt $\{\overline{F}_m\}$ eine Nullstelle $(x^0)_k$ und diese kann — eventuell nach einer nicht ausgearteten homogenen linearen Transformation mit komplexen Koeffizienten $(y)_k = L(x)_k$ — durch Auflösen von lauter regulären Gleichungen (vgl. [7], S. 13) bestimmt werden. Das Ideal $\mathfrak{r}$ kann auch das Nullideal sein. Umgekehrt gilt: Es sei eine homomorphe Abbildung von R auf den Körper der komplexen Zahlen gegeben, die das System $\{F_m\}$ in das System $\{\overline{F}_m\}$ überführe. Das System $\{F_m\}$ besitze eine Lösung $(x^0)_k$. Dann wird $\mathfrak{r}$ durch die Homomorphie auf 0 abgebildet.

Beweis. 1. Die nicht ausgeartete lineare Transformation mit komplexen Koeffizienten $(y)_k = L(x)_k$ überführe die Polynome F_m in Polynome F'_m, die regulär bezüglich y_k sind. Die Koeffizienten der höchsten Potenzen von y_k in den Polynomen F'_m sind Elemente von R:

$$f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_\Lambda^{(1)}. \tag{2}$$

$\mathfrak{a}_1$ sei das Ideal mit der Basis (2). Wenn $R \to \overline{R}$ eine Homomorphie von R auf den Körper der komplexen Zahlen ist, die das Ideal $\mathfrak{a}_1$ nicht auf 0 abbildet, so werden die Polynome F'_m in Polynome $\overline{F}_m$ überführt, von denen wenigstens eines regulär bezüglich y_k ist.

2. Das KRONECKERsche Resultantensystem der $\{F'_m\}$ bezüglich y_k sei das System

$$G_m(y)_{k-1} \qquad (m = 1, 2, \ldots, M_1). \tag{3}$$

Die Homomorphie $R \to \overline{R}$ überführe $\{G_m\}$ in $\{\overline{G}_m\}$. Weil wenigstens in einem Polynom F'_m der höchste Koeffizient in y_k auf den höchsten Koeffizienten

des Polynomes $\overline{F}_m$ in y_k abgebildet wird, ist $\{\overline{G}_m\}$ Resultantensystem von $\{\overline{F}_m\}$ bezüglich y_k (vgl. [6], S. 56). Ist also $(y')_{k-1}$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$\overline{G}_m(y)_{k-1} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, M_1), \tag{4}$$

so gibt es wenigstens eine Lösung $\{(y')_{k-1}, y'_k\}$ des Systems

$$F_m(y)_k = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, M). \tag{5}$$

Die Umkehrung dazu reicht weiter:

Die Homomorphie $R \to \overline{R}$ überführe $\{F_m\}$ in $\{\overline{F}_m\}$ und $\{G_m\}$ in $\{\overline{G}_m\}$. Ist $(y')_k$ eine Lösung von (5), so erfüllt $(y')_{k-1}$ die Gln. (4).

3. Auf das System $\{G_m\}$ wenden wir die am System $\{F_m\}$ durchgeführten Rechnungen erneut an. Wir gelangen zu einem Resultantensystem $\{H_m(y)_{k-2}\}$ und einem Ideal $\mathfrak{a}_2$ usw. Es können bei fortschreitender Elimination der y_ν zwei Fälle eintreten:

(a) Ein Resultantensystem verschwindet identisch. Ist z. B. $\{H_m\}$ identisch Null, so gibt es zu beliebigem $(y')_{k-2}$ Zahlen y'_{k-1} und y'_k, derart, daß $(y')_{k-1}$ (4) und $(y')_k$ (5) lösen. Das Verfahren bricht dann ab; $\mathfrak{r}$ ist das Nullideal.

(b) Nach Elimination aller k Variablen y_ν erhalten wir ein System von Elementen aus R:

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k. \tag{6}$$

Diese erzeugen das Resultantenideal $\mathfrak{r}$.

4. Im Verlaufe der Elimination seien Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$ aufgetreten, die für die Regularität der Zwischensysteme $\{F_m\}$, $\{G_m\}$, ... bestimmend sind. Das Ausnahmeideal $\mathfrak{i}$ sei gleich dem Durchschnittsideal: $\mathfrak{i} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s$. Mit $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{r}$ gilt der Hilfssatz.

§ 6. Algebraische Berechnung der Anfänge analytischer Kurven.

6.1. Zur Lösung der in Abschnitt 4.4 formulierten Aufgabe machen wir den Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten:

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + \cdots + a_{\lambda r} t^r + b_{\lambda r+1} t^{r+1} + b_{\lambda r+2} t^{r+2} + \cdots \qquad (\lambda = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Für das System von Unbestimmten $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{n\nu}$ gebrauchen wir zur Abkürzung das Symbol $\mathfrak{a}_\nu$, entsprechend werde das System $b_{1\nu}, b_{2\nu}, \ldots, b_{n\nu}$ mit $\mathfrak{b}_\nu$ bezeichnet. Setzen wir die Entwicklungen (1) in die linken Seiten der Gleichungen von Δ

$$\varphi_\nu(x)_n = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{2}$$

ein, so erhalten wir (formale) Potenzreihen von t:

$$\begin{cases} \varphi_\nu^*(t) = P_{\nu 1}(\mathfrak{a}_1) \cdot t + P_{\nu 2}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)\, t^2 + \cdots + P_{\nu r}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r)\, t^r + \\ + P_{\nu r+1}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{b}_{r+1})\, t^{r+1} + \cdots + P_{\nu m}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_m)\, t^m + \cdots. \end{cases} \tag{3}$$

$P_{\nu m}$ ist ein Polynom der Variablen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_m$ mit komplexen Zahlenkoeffizienten. Mit T_m werde dasjenige Gleichungssystem bezeichnet,

das durch Nullsetzen der Koeffizienten von $t, t^2, \ldots, t^m$ entsteht:

$$T_m: \quad P_{\nu s} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, N). \tag{4}$$

6.2. Um bestimmte Schlüsse nicht wiederholen zu müssen, werde eine Vereinbarung über die Bezeichnung getroffen. Es sei R der Ring der Polynome von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ mit Koeffizienten aus dem Körper der komplexen Zahlen. Ist $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ ein Primideal des Ringes R, so sei $R_{\alpha\beta\ldots\vartheta} = R/\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$. Ersetzen wir die linken Seiten der Gleichungen von T_m durch ihre Restklassen mod $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$, so entstehe das System $T_m(\alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$. Ist $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$, so bedeutet die Substitution $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2^0, \ldots, \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_r^0$ eine relationstreue Spezialisierung der allgemeinen Nullstelle von $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ und bewirkt eine Homomorphie des Ringes $R_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ auf den Körper der komplexen Zahlen. Wenden wir diese Homomorphie auf ein Ideal $\mathfrak{i}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ in $R_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ oder auf das System $T_m(\alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$ an, so werde das Ergebnis durch Überstreichen gekennzeichnet, also $\bar{\mathfrak{i}}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ bzw. $\bar{T}_m(\alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$.

6.3. Wir fassen das System T_r ins Auge. Die Lösungen von T_r erfüllen endlich viele irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten, von denen jede durch ein Primärideal des Ideals $(P_{\nu s}, s = 1, \ldots, m, \nu = 1, \ldots, N)$ im Ring R bestimmt wird. Die zugehörigen Primideale seien $\mathfrak{p}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, h$. Nun sei $m > r$ eine fest gewählte positive ganze Zahl. Das System T_m enthält außer den Gleichungen von T_r noch Gleichungen in den Variablen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_m$. Ist $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0, \mathfrak{b}_{r+1}^0, \ldots, \mathfrak{b}_m^0\}$ eine Lösung von T_m, so ist $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ Nullstelle wenigstens eines Ideals $\mathfrak{p}_\alpha$. Auf das System $T_m(\alpha)$ (vgl. 6.2) wenden wir den Hilfssatz des § 5 an, indem $\mathfrak{b}_{r-1}, \ldots, \mathfrak{b}_m$ die Rolle der dort mit $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bezeichneten Variablen übernehmen. Es gibt danach im Ring R_α (vgl. 6.2) ein Resultantenideal $\mathfrak{r}_m^{(\alpha)}$ und ein Ausnahmeideal $\mathfrak{i}_m^{(\alpha)}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Ist $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$ und gilt für diese sowohl $\bar{\mathfrak{r}}_m^{(\alpha)} = 0$ wie $\bar{\mathfrak{i}}_m^{(\alpha)} \neq 0$, so gibt es ein Lösungssystem $\{\mathfrak{b}_{r-1}^0, \ldots, \mathfrak{b}_m^0\}$ von $\bar{T}_m(\alpha)$ (vgl. 6.2).

(b) Ist $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0, \mathfrak{b}_{r-1}^0, \ldots, \mathfrak{b}_m^0\}$ eine Lösung von T_m und $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$, so gilt für diese $\bar{\mathfrak{r}}_m^{(\alpha)} = 0$.

6.4. Lassen wir jetzt m von $r+1$ an wachsen, so erhalten wir Folgen von Resultantenidealen und von Ausnahmeidealen:

$$\mathfrak{r}_{r+1}^{(\alpha)}, \qquad \mathfrak{r}_{r+2}^{(\alpha)}, \ldots, \tag{5}$$

$$\mathfrak{i}_{r+1}^{(\alpha)}, \qquad \mathfrak{i}_{r+2}^{(\alpha)}, \ldots. \tag{6}$$

Dann sei $\mathfrak{q}_m^{(\alpha)}$ das Vereinigungsideal

$$\mathfrak{q}_m^{(\alpha)} = \mathfrak{r}_{r+1}^{(\alpha)} \cup \mathfrak{r}_{r+2}^{(\alpha)} \cup \ldots \cup \mathfrak{r}_m^{(\alpha)}.$$

Die Ideale $\mathfrak{q}_m^{(\alpha)}$ bilden eine Teilerkette im Ring R_α. Nun gilt in R_α der Teilerkettensatz (vgl. [5], S. 23, 26). Es gibt also eine Zahl M derart, daß

$$\mathfrak{q}_m^{(\alpha)} = \mathfrak{q}_M^{(\alpha)} \quad \textit{für} \quad m \geq M. \tag{7}$$

Wir setzen $\mathfrak{q}_M^{(\alpha)} = \mathfrak{q}_\alpha$ und erhalten folgende Ergebnisse:

(a) Ist $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$ und gilt für diese $\bar{q}_\alpha = 0$ und $\bar{i}_m^{(\alpha)} \neq 0$ für alle $m \geqq r+1$, so besitzt jedes System $T_m(\alpha)$ $(m \geqq r+1)$ eine Lösung

$$\{b_{r+1}^{(m)}, \ldots, b_m^{(m)}\}. \tag{8}$$

Denken wir an die Herkunft der Systeme $\overline{T}_m(\alpha)$, so können wir dieses Resultat nach Definition IV folgendermaßen formulieren: Unter den angegebenen Voraussetzungen bestimmt $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ den Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ.

(b) Wenn $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$ ist und sich für jeden Wert von m $(m \geqq r+1)$ eine Lösung (8) des Systems $\overline{T}_m(\alpha)$ bestimmen läßt, so gilt $\bar{q}_\alpha = 0$; d. h. nach Definition IV: Wenn $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ den Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ bestimmt und eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$ ist, so gilt für diese $\bar{q}_\alpha = 0$.

(c) $\Gamma(r)$ sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ und werde durch $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ bestimmt. Dann ist dieses System Nullstelle wenigstens eines Ideals $\mathfrak{p}_\alpha$.

6.5. Betrachten wir jetzt eines der Ausnahmeideale $\mathfrak{i}_m^{(\alpha)}$. Nach dem 2. Isomorphiesatz (vgl. [7], S. 21) gibt es ein Ideal $\mathfrak{j}_m^{(\alpha)}$ in R, so daß der Restklassenring $R/\mathfrak{j}_m^{(\alpha)}$ isomorph ist dem Restklassenring $R_\alpha/\mathfrak{i}_m^{(\alpha)}$. Ferner ist $\mathfrak{j}_m^{(\alpha)}$ echter Teiler von $\mathfrak{p}_\alpha$. Das Ideal $\mathfrak{j}_m^{(\alpha)}$ ist Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen, bestimmt daher endlich viele Primideale. Da die Dimension von $\mathfrak{j}_m^{(\alpha)}$ kleiner als die Dimension von $\mathfrak{p}_\alpha$ ist, ist auch die Dimension jedes der erwähnten Primideale kleiner als die Dimension von $\mathfrak{p}_\alpha$. Für jeden Wert von $m \geqq r+1$ erhalten wir so endlich viele Primideale in R. Wir numerieren sie fortlaufend $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$ $(\beta = 1, 2, \ldots)$ und merken uns, daß die Dimension jedes Ideals $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$ kleiner als die Dimension von $\mathfrak{p}_\alpha$ ist.

6.6. Mit jedem Ideal $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$ wiederholen wir die Überlegungen, die in 6.3 bis 6.5 mit $\mathfrak{p}_\alpha$ vorgenommen wurden. Das Ergebnis ist: Es gibt im Ring $R_{\alpha\beta}$ ein Ideal $\mathfrak{q}_{\alpha\beta}$ und abzählbar unendlich viele Ideale $\mathfrak{i}_m^{(\alpha\beta)}$ $(m \geqq r+1)$, welche die Eigenschaften (a) und (b) in 6.4 besitzen (mit $\mathfrak{q}_{\alpha\beta}$ an Stelle von $\mathfrak{q}_\alpha$ und $\mathfrak{i}_m^{(\alpha\beta)}$ an Stelle von $\mathfrak{i}_m^{(\alpha)}$). (c) werde durch folgendes Ergebnis ersetzt:

(c′) $\Gamma(r)$ sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ und werde durch $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ bestimmt. Dies System sei Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$, und es gelte für ein Ausnahmeideal $\bar{\mathfrak{i}}_m^{(\alpha)} = 0$; dann ist es Nullstelle wenigstens eines Ideals $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$.

Durch die Ausnahmeideale $\mathfrak{i}_m^{(\alpha\beta)}$ werden wie in 6.5 Primideale $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\gamma}$ $(\gamma = 1, 2, \ldots)$ in R bestimmt. Die Dimension jedes Ideals $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\gamma}$ ist kleiner als die Dimension von $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$. Jedes Ideal $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\gamma}$ wird denselben Rechnungen unterworfen; so wird weiter geschlossen. Da sich bei jedem Schritt, der die Hinzufügung eines neuen Index bedeutet, die Dimension der Ideale $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}\ldots$ um wenigstens 1 erniedrigt, kommen wir nach endlich vielen Schritten dieser Art auf Primideale $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$, deren Dimension 0 ist, die also ein Basissystem aus n r linearen Polynomen besitzen mit einer einzigen Nullstelle $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$. $R_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ ist dann isomorph dem Körper der komplexen Zahlen, und zwar wird bei dieser Isomorphie ein Element $f(a_1, \ldots, a_r)$ von $R_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ auf die Zahl $f(a_1^0, \ldots, a_r^0)$

abgebildet. Die Gleichungen von $T_m^{(\alpha\beta\cdots\vartheta)}$ haben dann linke Seiten, die Polynome von $\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_m$ mit komplexen Koeffizienten sind. Das Ideal $\mathfrak{r}_m^{(\alpha\beta\cdots\vartheta)}$ ist entweder das Null- oder das Einsideal; das Ideal $\mathfrak{i}_m^{(\alpha\beta\cdots\vartheta)}$ ist stets das Einsideal. Wenn für jeden Wert von $m \geqq r+1$ $\mathfrak{r}_m^{(\alpha\beta\cdots\vartheta)}$ das Nullideal ist, bestimmt $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ den Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ. Wenn wenigstens für einen Wert von m $\mathfrak{r}_m^{(\alpha\beta\cdots\vartheta)}$ das Einsideal ist, gibt es keinen Anfang $\Gamma(r)$ mit diesen Koeffizienten.

6.7. Wir fassen die Ergebnisse der Rechnungen 6.1 bis 6.6 zusammen. Die Menge $\mathfrak{M}^{(r)}$ der Anfänge $\Gamma(r)$ von analytischen Kurven auf Δ wird von abzählbar unendlich vielen Teilmengen $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ überdeckt. $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ wird durch ein Primideal $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ des Ringes R, ein Ideal $\mathfrak{q}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ des Ringes $R^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = R/\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ und abzählbar unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$, $j = 1, 2, \ldots$, des Ringes R folgendermaßen gekennzeichnet: $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ sei die Menge derjenigen Anfänge von analytischen Kurven $\Gamma(r)$ auf Δ, die Nullstellen von $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ dagegen keine Nullstellen eines der Ideale: $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$, $j = 1, 2, \ldots$, bestimmen. Es gilt:

(a) Das System $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ sei eine Nullstelle von $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ und keine Nullstelle der Ideale $\mathfrak{p}^r_{\alpha_2\ldots\alpha_s j}$, $j = 1, 2, \ldots$. Erfüllt es außerdem $\bar{\mathfrak{q}}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = 0$, so bestimmt es den Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ, der dann zu $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ gehört.

(b) Wenn $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}^r_{\alpha\ldots\alpha_s}$ ist und den Anfang einer analytischen Kurve $\Gamma(r)$ auf Δ bestimmt, so gilt $\bar{\mathfrak{q}}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = 0$.

(c) Jeder Anfang einer analytischen Kurve $\Gamma(r)$ auf Δ gehört zu einer Teilmenge $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$.

(d) Die Dimension des Ideals $\mathfrak{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$ ist kleiner als die Dimension des Ideals $\mathfrak{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$.

6.8. Für die späteren Untersuchungen ist es nötig, jede Menge $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ noch einmal aufzuteilen. Es gibt im Ring R ein Ideal $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ derart, daß $R^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}/\mathfrak{q}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ isomorph ist dem Restklassenring $R/\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$. Das Ideal $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ werde in Primärkomponenten zerlegt, zu denen die Primideale $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$ ($\beta = 1, 2, \ldots$) gehören sollen. $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$ sei die Menge derjenigen Anfänge $\Gamma(r)$, die Nullstellen von $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$, dagegen keine Nullstellen eines der Primideale $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$ ($j = 1, 2, \ldots$) bestimmen. Die Eigenschaften (a), (b), (c) sind nun folgendermaßen zu formulieren:

(a) Ist das System $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$, dagegen keine Nullstelle eines der Ideale $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$, $j = 1, 2, \ldots$, so bestimmt es einen Anfang $\Gamma(r)$ auf Δ aus $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$.

(b) Wenn das System $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ ist und den Anfang einer analytischen Kurve $\Gamma(r)$ auf Δ bestimmt, so ist es Nullstelle eines der Ideale $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$.

(c) Jeder Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ gehört zu einer Menge $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$.

Auch die Menge der $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$ ist abzählbar. Es kann vorkommen, daß eine dieser Mengen leer ist, und zwar ist das dann der Fall, wenn $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$ Teiler eines der Ideale $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$ ($j = 1, 2, \ldots$) ist.

§ 7. Algebraische Berechnung der formalen singulären Bildpunkte.

7.1. Nach Definition V können wir durch Anfänge analytischer Kurven auf Δ vom Typ $\Gamma(r)$ formale singuläre Bildpunkte mit einem Exponenten $\leq r$ erzeugen. Dazu gehören (bei geeignetem r) auch alle singulären Bildpunkte von 1. Art (vgl. Definition III und Satz 5). Wir setzen die Polynome

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

in die Funktionen $p_j(x)$ und $q_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ ein und erhalten Potenzreihen von t:

$$\left.\begin{aligned} p_j'(t) = t\, g_{j1}(a_1) + t^2 g_{j2}(a_1, a_2) + \cdots + t^i g_{ji}(a_1, a_2, \ldots, a_i) + \cdots + \\ + t^r g_{jr}(a_1, a_2, \ldots, a_r) + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} q_j'(t) = t\, h_{j1}(a_1) + t^2 h_{j2}(a_1, a_2) + \cdots + t^i h_{ji}(a_1, a_2, \ldots, a_i) + \cdots + \\ + t^r h_{jr}(a_1, a_2, \ldots, a_r) + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dabei sind g_{ji} und h_{ji} Polynome der durch $a_1, a_2, \ldots, a_i$ bezeichneten Variablen vom Grade $\leq i$.

7.2. Wir berechnen die formalen singulären Bildpunkte mit dem Exponenten r. Derartige Punkte können auf mehrfache Weise gewonnen werden. Jede Möglichkeit wird durch zwei Folgen von k Indizes folgendermaßen gekennzeichnet: $A(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$. Dabei gilt

1. $1 \leq \mu_i \leq r$, $1 \leq \nu_i \leq r$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.
2. Wenigstens eine der Zahlen μ_i oder ν_i ist gleich r.
3. $g_{j1} = 0, g_{j2} = 0, \ldots, g_{j\mu_j - 1} = 0, g_{j\mu_j} \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.
4. $h_{j1} = 0, h_{j2} = 0, \ldots, h_{j\nu_j - 1} = 0, h_{j\nu_j} \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

7.3. Wir fassen die Anfänge analytischer Kurven ins Auge, die zu $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$ gehören, und bezeichnen die Menge derjenigen unter ihnen, die formale singuläre Bildpunkte vom Typ $A(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ ergeben, mit $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$. Zur Berechnung dieser Menge dienen die folgenden Bestimmungsgleichungen:

(a) Ist $g^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)\, \varrho$ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ eine Basis des Primideals $\mathfrak{k}^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$, so bilden wir die Gleichungen

$$g^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)\, \varrho = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots). \tag{4a}$$

$$g_{j1} = 0,\ g_{j2} = 0, \ldots, g_{j\mu_j - 1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{4b}$$

$$h_{j1} = 0,\ h_{j2} = 0, \ldots, h_{j\nu_j - 1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{4c}$$

Die Gln. (4a, b, c) bestimmen endlich viele irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten. Die zugehörigen Primideale seien $\mathfrak{q}_\gamma$.

7.4. Es werden drei Fälle unterschieden:

1. Das Primideal $\mathfrak{q}_\gamma$ enthält eine der Funktionen $g_{j\mu_j}$, $h_{j\nu_j}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$.

2. Das Primideal $\mathfrak{q}_\gamma$ enthält eines der abzählbar unendlich vielen Primideale $\mathfrak{p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s j}$ $(j=1, 2, \ldots)$; vgl. 6.7.

3. $\mathfrak{q}_\gamma$ erfüllt weder 1. noch 2.

In den ersten beiden Fällen ist $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}(\beta)$ $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ leer.

7.5. Es werde Fall 3 vorausgesetzt. Entsprechend der Definition V des formalen singulären Bildpunktes setzen wir für $j=1, 2, \ldots, k$

(5a) wenn $\mu_j > \nu_j$ ist: $\zeta_j = 0$;

(5b) wenn $\mu_j = \nu_j$ ist: $\zeta_j = \dfrac{g_{j\mu_j}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r)}{h_{j\nu_j}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r)}$;

(5c) wenn $\mu_j < \nu_j$ ist: $\zeta_j = \infty$.

Es sei M die zum Primideal $\mathfrak{q}_\gamma$ gehörende irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit. Die Gln. (5) bestimmen eine rationale Abbildung

$$\zeta_j = S_j(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r) \qquad (j=1, 2, \ldots, k) \tag{6}$$

der irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit M. Diese Abbildung bildet M auf eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit M' im $(\zeta)_k$-Raum ab (vgl. [6], S. 140). Wir behaupten:

7.6. *Alle Punkte von M' sind singuläre Bildpunkte.*

Beweis. (a) Wir nennen einen Punkt $\{\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ von M einen gewöhnlichen Punkt, wenn er

1. keine Nullstelle einer Funktion $g_{j\mu_j}, h_{j\nu_j}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$,

2. keine Nullstelle eines Ideals $\mathfrak{p}_{a_1 a_2 \ldots a_s j}$ $(j=1, 2, \ldots)$ ist.

(b) Es sei $\{\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ ein gewöhnlicher Punkt von M. Dann ist $\zeta_j^0 = S_j(\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0)$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ ein formaler singulärer Bildpunkt, also nach Satz 6 auch ein singulärer Bildpunkt im Sinne von Definition I.

(c) Wenn M ein einzelner Punkt ist, ist M auch gewöhnlicher Punkt. Wir setzen voraus, daß M kein einzelner Punkt sei und beweisen, daß jeder Punkt von M Grenzpunkt von gewöhnlichen Punkten von M ist. Zunächst beweisen wir diese Behauptung für die endlichen Punkte von M.

P sei ein endlicher Punkt von M und nicht Grenzpunkt von gewöhnlichen Punkten. Es gibt dann eine Umgebung $U(P)$ von P auf M, deren abgeschlossene Hülle $\overline{U(P)}$ frei von gewöhnlichen Punkten ist. Die Dimension von M sei d. Die Ideale $\mathfrak{q}_\gamma \cup g_{j\mu_j}$, $\mathfrak{q}_\gamma \cup h_{j\nu_j}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ und $\mathfrak{q}_\gamma \cup \mathfrak{p}_{a_1 a_2 \ldots a_s j}$ $(j=1, 2, \ldots,)$ bestimmen abzählbar unendlich viele algebraische Mannigfaltigkeiten M_ν, $\nu=1, 2, \ldots$, mit Dimensionen $\leqq d-1$, die auf M liegen und alle nicht gewöhnlichen Punkte enthalten. Es sei $M_\nu^* = M_\nu \cap \overline{U(P)}$ $(\nu=1\ 2\ \ldots,)$; M_ν^* ist abgeschlossen in $\overline{U(P)}$. Nach der Definition von $U(P)$ ist dann

$$\overline{U(P)} = \bigcup_\nu M_\nu^*. \tag{6}$$

Wir beweisen: M_ν^* ist nirgends dicht in $\overline{U(P)}$ (vgl. [4], S. 46). Nach Satz 14, loc. cit., genügt es zu beweisen, daß $\overline{U(P)} - M_\nu^*$ dicht in $\overline{U(P)}$ ist. Ist i das zu M_ν gehörende Primideal, so ist i echter Teiler von $\mathfrak{q}_{j'}$. Es gibt also ein Polynom q, welches zu i und nicht zu $\mathfrak{q}_{j'}$ gehört. Nach dem Satz von Ritt ist jeder Punkt von M mit $q = 0$ Grenzpunkt von solchen Punkten von M, in denen $q \neq 0$ ist; d.h. jeder Punkt von M, der zu M_ν gehört, ist Grenzpunkt von solchen Punkten von M, die nicht in M_ν liegen; d.h. $M - M_\nu$ ist dicht in M. Hieraus folgt, daß $\overline{U(P)} - M_\nu^*$ dicht in $\overline{U(P)}$ ist. Also ist M_ν^* nirgends dicht in $\overline{U(P)}$. Die Formel (6) ergibt einen unmittelbaren Widerspruch zum Baireschen Dichtigkeitssatz (vgl. [4], S. 108). Damit ist bewiesen, daß jeder endliche Punkt von M Grenzpunkt von gewöhnlichen Punkten von M ist. Hieraus folgt dieselbe Behauptung auch für die unendlich fernen Punkte von M (im Raum der Funktionentheorie).

(d) Aus (b) und (c) folgt nun, daß jeder Punkt von M' Grenzpunkt von singulären Bildpunkten ist (vgl. [6], S. 140). Da nach Satz 1 die Menge der singulären Bildpunkte kompakt ist, ist jeder Punkt von M' singulärer Bildpunkt, wie behauptet.

7.7. Die Anzahl der Mengen $\mathfrak{M}^{\nu}_{\varkappa_1 \varkappa_2 \dots \varkappa_s}(\beta)$ $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k;\ \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)$ ist abzählbar. Da jede solche Menge endlich viele Primideale $\mathfrak{q}_{j'}$ bestimmt, ist auch die Anzahl der letzteren abzählbar. Es gibt also abzählbar unendlich viele irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten $W_\nu^{(r)}$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Jeder Punkt von $W_\nu^{(r)}$ ist singulärer Bildpunkt.

(b) Jeder formale singuläre Bildpunkt mit dem Exponenten r liegt auf wenigstens einem $W_\nu^{(r)}$, $\nu = 1, 2, \dots$.

Lassen wir r alle möglichen Werte $\geqq 1$ annehmen, so ist die Vereinigungsmenge aller $W_\nu^{(r)}$ $(\nu = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots)$ wieder abzählbar. Diese Mannigfaltigkeiten $W_\nu^{(r)}$ enthalten alle (formalen oder im Sinne von Definition II) singulären Bildpunkte 1. Art.

7.8. Wir bestimmen die singulären Bildpunkte 2. Art (vgl. Definition III, Nr. 2.4). Die erzeugenden Kurven derartiger singulärer Bildpunkte bringen eine oder mehrere der Funktionen $p_j(x)$ oder $q_j(x)$ zum identischen Verschwinden, jedoch für keinen Wert von j gleichzeitig p_j und q_j.

Definition VI. $A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung der analytischen Mannigfaltigkeit Δ mit den Gleichungen

$$\varphi_\nu(x)_n = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, N). \tag{7}$$

$i_1, i_2, \dots, i_\sigma$ und $h_1, h_2, \dots, h_\tau$ seien Systeme von verschiedenen positiven ganzen Zahlen, die $\geqq 1$ und $\leqq k$ sind; es gelte auch $i_\mu \neq h_\nu$ für alle μ und ν. Die Gln. (7) und

$$\begin{cases} p_{i_1}(x)_n = 0, & p_{i_2}(x)_n = 0, \dots, & p_{i_\sigma}(x)_n = 0, \\ q_{h_1}(x)_n = 0, & q_{h_2}(x)_n = 0, \dots, & q_{h_\tau}(x)_n = 0 \end{cases} \tag{8}$$

bestimmen in der Umgebung des Punktes 0 eine analytische Mannigfaltigkeit Δ_1. Die Vereinigungsmenge derjenigen isolierten, in O irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten von Δ_1, auf denen für keinen Wert von j, $j = 1, 2, \ldots, k$, gleichzeitig $p_j(x)$ und $q_j(x)$ identisch verschwinden, sei Δ^*. $\Gamma^*(r)$ sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ^* (vgl. Definition IV, Nr. 3.1). Es sei $r \geqq 1$. Setzen wir die Entwicklungen von $\Gamma^*(r)$ in die Funktionen $p_j(x)$ für $j \neq i_1, i_2, \ldots, i_\sigma$ und in die Funktionen $q_j(x)$ für $j \neq h_1, h_2, \ldots, h_\tau$ ein, so entstehen:

$$(9) \qquad \begin{cases} p_j' = t^{\alpha_j}(c_{j0} + t\,c_{j1} + \cdots), & c_{j0} \neq 0,\ 1 \leqq j \leqq k,\ j \neq i_1, i_2, \ldots, i_\sigma, \\ q_j' = t^{\beta_j}(d_{j0} + t\,d_{j1} + \cdots), & d_{j0} \neq 0,\ 1 \leqq j \leqq k,\ j \neq h_1, h_2, \ldots, h_\tau. \end{cases}$$

Wir setzen über $\Gamma^*(r)$ außerdem voraus, daß alle Zahlen α_j und $\beta_j \leqq r$ seien. Dann definieren wir:

$$\zeta_{i_1} = 0, \quad \zeta_{i_2} = 0, \ldots, \quad \zeta_{i_\sigma} = 0,$$
$$\zeta_{h_1} = \infty, \quad \zeta_{h_2} = \infty, \ldots, \quad \zeta_{h_\tau} = \infty.$$

Für $j \neq i_1, i_2, \ldots, i_\sigma, h_1, h_2, \ldots, h_\tau$ werde ζ_j nach den Vorschriften (a), (b), (c) in Definition V (Nr. 4.1) berechnet.

Den Punkt mit den Koordinaten $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k)$ bezeichnen wir als *formalen singulären Bildpunkt 2. Art* und sagen: $(\zeta)_k$ *wird durch* $\Gamma^*(r)$ *erzeugt*. Die größte unter den Zahlen α_j, β_j in den Formeln (9) werde *Exponent 2. Art* genannt. Diese Zahl ist $\leqq r$.

An die Stelle der Sätze 5 und 6 treten die folgenden Sätze, die genau so bewiesen werden:

Satz 7. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. Q sei ein singulärer Bildpunkt 2. Art von $A_k(\Delta)$ (vgl. Definition III, Nr. 2.4). Es gebe eine Q erzeugende analytische Kurve, welche außer den Gln. von Δ (7) noch die Gln. (8) erfülle. Dann ist Q formaler singulärer Bildpunkt 2. Art von $A_k(\Delta)$ und besitzt als solcher einen (endlichen) Exponenten 2. Art.*

Satz 8. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. $Q = (\zeta)_k$ sei ein formaler singulärer Bildpunkt 2. Art von $A_k(\Delta)$ und werde durch $\Gamma^*(r)$ erzeugt (vgl. Definition VI). Dann gibt es eine analytische Kurve γ durch den Punkt 0, die Q gemäß der Definition in Satz 3, Nr. 2.3 erzeugt. Auf γ gelten überdies die Gln. (8). Q ist singulärer Bildpunkt von $A_k(\Delta)$ im Sinne der Definition II, Nr. 1.3.*

Wir wenden die Rechnungen des § 6 anstatt auf Δ auf Δ^* an und bestimmen die formalen singulären Bildpunkte 2. Art unter Berücksichtigung der Definition VI wie in den Nr. 1 bis 7 dieses Paragraphen. Dabei ist der Begriff des Exponenten 2. Art zu benutzen. Als Ergebnis erhalten wir:

Es gibt abzählbar unendlich viele irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten, die alle singulären Bildpunkte 2. Art von $A_k(\Delta)$ enthalten und aus lauter singulären Bildpunkten von $A_k(\Delta)$ bestehen.

Fassen wir dieses Ergebnis mit dem von Nr. 7.7 zusammen, so erhalten wir:

Die Menge der singulären Bildpunkte der meromorphen Abbildung $A_k(\Delta)$ erfüllt eine abzählbar unendliche Menge von irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Im nächsten Paragraphen beweisen wir, daß nur endlich viele darunter isoliert sind.

§ 8. Beweis des Hauptsatzes und Folgerungen.

8.1. Die irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeiten der singulären Bildpunkte seien

$$B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots. \tag{1}$$

Aus dieser Reihe streichen wir alle diejenigen weg, die ganz zu einer höherdimensionalen Mannigfaltigkeit dieser Reihe gehören. Es wird also B_i gestrichen, wenn es eine Mannigfaltigkeit B_j gibt, welche B_i ganz enthält. Die dann entstehende Reihe sei

$$B_{a_1}, B_{a_2}, \ldots B_{a_m}, \ldots. \tag{2}$$

8.2. *Die Reihe* (2) *enthält nur endlich viele Elemente.*

Um einen indirekten Beweis zu führen, nehmen wir das Gegenteil an. Dann gibt es einen Punkt Q im $(\zeta)_k$-Raum, derart, daß jede beliebige Umgebung von Q durch unendlich viele Mannigfaltigkeiten der Reihe (2) geschnitten wird. Der Punkt Q ist als Häufungspunkt von singulären Bildpunkten nach Satz 1 (Nr. 2.1) selbst singulärer Bildpunkt. Nach Satz 2 (Nr. 2.2) gibt es eine Umgebung $U(Q)$ von Q derart, daß die singulären Bildpunkte, die zu $U(Q)$ gehören, endlich viele in Q irreduzible analytische Mannigfaltigkeiten

$$M_1, M_2, \ldots, M_s \tag{3}$$

erfüllen. Wir setzen voraus, daß keine der Mannigfaltigkeiten M_i ganz zu einer höherdimensionalen Mannigfaltigkeit dieser Reihe gehöre. Die Dimension von M_i sei d_i. Wir stellen die Behauptung auf:

8.3. *Jede Mannigfaltigkeit M_i liegt auf wenigstens einer algebraischen Mannigfaltigkeit B_{a_m}.*

Beweis. (a) Der Beweis ist indirekt, ähnlich wie der in 7.6 (c). Es sei $U_1(Q)$ eine Umgebung von Q, deren abgeschlossene Hülle $\overline{U_1(Q)}$ ganz in $U(Q)$ liegt. Es sei

$$\overline{M}_i = \overline{U_1(Q)} \cap M_i, \qquad D_{im} = \overline{U_1(Q)} \cap M_i \cap B_{a_m}.$$

(b) Weil jeder auf $\overline{M}_i$ liegende singuläre Bildpunkt wenigstens einer algebraischen Mannigfaltigkeit B_{a_m} angehört, ist

$$\overline{M}_i = \bigcup_m D_{im}. \tag{4}$$

Wir beweisen, daß jede Menge D_{im} in $\overline{M}_i$ nirgends dicht ist, und zeigen, daß $\overline{M}_i - D_{im}$ in $\overline{M}_i$ dicht ist. Da die in Q irreduzible analytische Mannigfaltigkeit M_i nicht zu B_{a_m} gehört, gibt es im Primideal, das durch B_{a_m} bestimmt wird, wenigstens ein Polynom p, welches auf M_i nicht identisch verschwindet. Jeder Punkt von M_i, in dem $p = 0$ gilt, ist Grenzpunkt von solchen Punkten von M_i, in denen $p \neq 0$ ist. Dies folgt aus den Stetigkeitssätzen über analytische Mannigfaltigkeiten (vgl. [3], S. 111). Da also D_{im} nirgends dicht in M_i ist, ergibt Formel (4) einen Widerspruch zum BAIRE-schen Dichtigkeitssatz. Damit ist die Behauptung bewiesen.

8.4. M_i gehöre zu $B_{(i)}$. Die Dimension von $B_{(i)}$ sei δ_i. Die irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit $B_{(i)}$ hat auch in jedem ihrer Punkte die Dimension δ_i (vgl. [7], S. 154). Da M_i in $B_{(i)}$ liegt, muß $\delta_i \geq d_i$ sein. Wäre nun $\delta_i > d_i$, so würde $B_{(i)}$ in der Umgebung von Q durch δ_i-dimensionale analytische Mannigfaltigkeiten darstellbar sein. Da $B_{(i)}$ aus lauter singulären Bildpunkten besteht, gäbe es also in der Reihe (3) eine Mannigfaltigkeit der Dimension δ_i, welche M_i ganz enthält, im Widerspruch zu den Eigenschaften der Reihe (3).

8.5. M_i kann nicht gleichzeitig auf zwei verschiedenen algebraischen Mannigfaltigkeiten $B_{(i_1)}$ und $B_{(i_2)}$ liegen. Nach 8.4 sind nämlich $B_{(i_1)}$ und $B_{(i_2)}$ beide d_i-dimensional. Da sie beide irreduzibel sind, ist ihr Durchschnitt $\leq d_i - 1$ dimensional. Dieser Durchschnitt müßte die d_i-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit M_i enthalten, was unmöglich ist.

8.6. Es können also höchstens so viele algebraische Mannigfaltigkeiten der Reihe (2) in die Umgebung $U(Q)$ hineinreichen, wie es analytische Mannigfaltigkeiten (3) gibt, also höchstens s. Das ist ein Widerspruch zur Annahme unserer indirekten Schlußweise (vgl. Nr. 8.2). Damit ist bewiesen, daß die Anzahl der Elemente in der Reihe (2) endlich ist.

Satz 9. *Die Menge der singulären Bildpunkte der meromorphen Abbildung $A_k(\Delta)$ im Punkte 0 erfüllt eine algebraische Mannigfaltigkeit.*

8.7. Jede Mannigfaltigkeit (2) wurde aus einem System $\mathfrak{M}^{\nu}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$ $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k;\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ (oder einem System dieser Art für singuläre Bildpunkte 2. Art, vgl. Nr. 7.8) gewonnen. Daher folgt:

Hauptsatz. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung der analytischen Mannigfaltigkeit Δ. Es gibt endlich viele Systeme von Polynomen*

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

mit zugehörigen algebraischen Gleichungssystemen

$$A_\mu(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr}) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, M) \tag{6}$$

derart, daß jeder singuläre Bildpunkt von $A_k(\Delta)$ im Punkte 0 folgendermaßen gewonnen wird: Durch Einsetzen von (5) in die Gleichungen von $A_k(\Delta)$

$$z_j = \frac{p_j(x)}{q_j(x)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

entstehen Funktionen $z_j = p_j'(t)/q_j'(t)$, $j = 1, \ldots, k$, *wobei* p_j' *und* q_j' *nicht gleichzeitig identisch verschwinden. Falls* $p_j'(t) \not\equiv 0$, $q_j'(t) \not\equiv 0$ *ist, sei:*

$$p_j'(t) = t^{\mu_j}\left(c_{\mu_j}^{(j)}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr}) + t\, c_{\mu_j+1}^{(j)} + \cdots\right), \qquad c_{\mu_j}^{(j)} \not\equiv 0,$$

$$q_j'(t) = t^{\nu_j}\left(d_{\nu_j}^{(j)}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr}) + t\, d_{\nu_j+1}^{(j)} + \cdots\right), \qquad d_{\nu_j}^{(j)} \not\equiv 0.$$

Für $j = 1, 2, \ldots, k$ *werde*

$$z_j = \begin{cases} 0 & \text{für } p_j' \equiv 0 \text{ oder für } \mu_j > \nu_j \\ \dfrac{c_{\mu_j}^{(j)}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr})}{d_{\mu_j}^{(j)}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr})} & \text{für } \mu_j = \nu_j \\ \infty & \text{für } q_j' \equiv 0 \text{ oder für } \nu_j > \mu_j \end{cases} \tag{7}$$

gesetzt. Durch diese Definition wird eine rationale Abbildung der algebraischen Mannigfaltigkeit (6) *bestimmt, welche diese auf eine algebraische Mannigfaltigkeit, die aus lauter singulären Bildpunkten von* $A_k(\Delta)$ *besteht, abbildet.*

Folgerung. Es gibt eine positive ganze Zahl m mit folgender Eigenschaft: Alle singulären Bildpunkte von $A_k(\Delta)$ haben einen Exponenten (1. oder 2. Art, vgl. Definitionen V und VI) $\leq m$ oder sind Häufungspunkte von singulären Bildpunkten von $A_k(\Delta)$ mit dieser Eigenschaft.

8.8. Definition VII. Es sei $A_k(\Delta)$ eine meromorphe Abbildung der analytischen Mannigfaltigkeit Δ mit den Gleichungen

$$\varphi_\nu(x) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{8}$$

Durch Entwicklung von $\varphi_\nu(x)$ nach homogenen Polynomen der (x) entstehe die Reihe

$$\varphi_\nu(x) = \varphi_{\nu 1}(x) + \varphi_{\nu 2}(x) + \cdots + \varphi_{\nu s}(x) + \cdots. \tag{9}$$

Es sei $\Phi_{\nu s}(x)$ die s-te Partialsumme dieser Reihe:

$$\Phi_{\nu s}(x) = \varphi_{\nu 1}(x) + \varphi_{\nu 2}(x) + \cdots + \varphi_{\nu s}(x). \tag{10}$$

Sind $z_j = p_j/q_j$ die Abbildungsgleichungen von $A_k(\Delta)$, so entwickeln wir $p_j(x)$ und $q_j(x)$ in die Diagonalreihen

$$p_j(x) = p_{j1}(x) + p_{j2}(x) + \cdots + p_{jr}(x) + \cdots \tag{11}$$

$$q_j(x) = q_{j1}(x) + q_{j2}(x) + \cdots + q_{jr}(x) + \cdots. \tag{12}$$

$A_k(r, s)$ sei die rationale Abbildung

$$z_j = \frac{P_{jr}(x)}{Q_{jr}(x)} = \frac{p_{j1}(x) + p_{j2}(x) + \cdots + p_{jr}(x)}{q_{j1}(x) + q_{j2}(x) + \cdots + q_{jr}(x)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{13}$$

der algebraischen Mannigfaltigkeit Δ_s mit den Gleichungen

$$\Phi_{\nu s}(x) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{14}$$

$A_{kr}(\Delta)$ sei die rationale Abbildung (13) der analytischen Mannigfaltigkeit Δ.

8.9. Satz 10. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. Zu jeder positiven ganzen Zahl r gibt es eine positive ganze Zahl s_0, derart, daß die singulären Bildpunkte mit dem Exponenten 1. Art (vgl. Definition V, Nr. 4.1) r der Abbildung $A_k(r, s)$ für $s \geqq s_0$ auch singuläre Bildpunkte der Abbildung $A_k(\Delta)$ sind (vgl. Definition VII).*

Beweis. In § 7 haben wir die Menge der singulären Bildpunkte von $A_k(\Delta)$ mit dem Exponenten r in Teilmengen $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$ $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ eingeteilt. Streichen wir von diesen diejenigen weg, welche ganz auf der abgeschlossenen Hülle einer anderen Menge dieser Art liegen, so bleiben nur endlich viele übrig. Zur Aufstellung der Gleichungen jeder solchen Teilmenge genügen endliche Abschnitte der Reihen (9), (11) und (12), wie sich insbesondere aus den Überlegungen in den Nr. 6.4 und 7.3 ergibt. Die längsten Partialsummen, die zur Berechnung irgendeiner der endlich vielen $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$ $(\mu_1, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ gebraucht werden, seien $\Phi_{\nu s_0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Berechnen wir sodann nach den Methoden der §§ 6, 7 die Gleichungen für die singulären Bildpunkte mit dem Exponenten 1. Art r der Abbildung $A_k(r, s)$ bei $s \geqq s_0$, so erhalten wir Systeme, welche die Gleichungen der singulären Bildpunkte mit dem Exponenten r der Abbildung $A_k(\Delta)$ enthalten. Daraus folgt die Behauptung. Genau so beweist man die Verallgemeinerung:

Satz 11. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. Zu jeder positiven ganzen Zahl r gibt es positive ganze Zahlen r_0 $(r_0 \geqq r)$, s_0 derart, daß die singulären Bildpunkte mit dem Exponenten r (1. oder 2. Art, vgl. Definitionen V und VI) der rationalen Abbildung $A_k(r, s)$ (vgl. Definition VII) für $r \geqq r_0$ und $s \geqq s_0$ auch singuläre Bildpunkte der Abbildung $A_k(\Delta)$ sind.*

Folgerung. Der Punkt Q sei singulärer Bildpunkt einer Folge von Abbildungen $A_k(r_m, s_m)$ $(m = 1, 2, \ldots; \lim_{m \to \infty} r_m = \infty, \lim_{m \to \infty} s_m = \infty)$ und habe für jede dieser Abbildungen einen Exponenten (1. oder 2. Art) $\leqq r_0$. Dann ist Q singulärer Bildpunkt von $A_k(\Delta)$.

8.10. Es werden die Abbildungen $A_{kr}(\Delta)$ untersucht (vgl. Definition VII).

Satz 12. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung; $A_{kr}(\Delta)$ seien die in Definition VII eingeführten rationalen Abbildungen von Δ.*

(a) *Jeder singuläre Bildpunkt mit dem Exponenten 1. Art ϱ von $A_k(\Delta)$ ist singulärer Bildpunkt mit dem Exponenten 1. Art ϱ für jede Abbildung $A_{kr}(\Delta)$, wenn $r \geqq \varrho$ ist.*

(b) *Jeder singuläre Bildpunkt mit dem Exponenten 1. Art ϱ der Abbildung $A_{kr}(\Delta)$ ist für $r \geqq \varrho$ singulärer Bildpunkt mit dem Exponenten 1. Art ϱ von $A_k(\Delta)$.*

(c) Es gibt eine positive ganze Zahl m mit der folgenden Eigenschaft: Es sei $M_r(m)$ die abgeschlossene Hülle der Menge der singulären Bildpunkte der Abbildung $A_{kr}(\Delta)$ mit Exponenten 1. Art $\leqq m$. Es sei $r \geqq m$. Die Menge $M_r(m)$ stimmt überein mit der abgeschlossenen Hülle der Menge der singulären Bildpunkte 1. Art von $A_k(\Delta)$.

Beweis. (a) und (b) folgen aus Definition V. (c) ergibt sich aus (a) und (b) und der Folgerung aus dem Hauptsatz (vgl. 8.7).

8.11. Satz 13. *Es sei Δ eine Vollumgebung U von 0.*

(a) *Jeder singuläre Bildpunkt von $A_k(U)$ ist von 1. Art.*

(b) *Es gibt eine positive ganze Zahl m mit der folgenden Eigenschaft: $M_r(m)$ sei die abgeschlossene Hülle der Menge der singulären Bildpunkte der Abbildung $A_{kr}(U)$ mit Exponenten 1. Art $\leq m$. Es sei $r \geq m$. $M_r(m)$ stimmt überein mit der Menge der singulären Bildpunkte der Abbildung $A_k(U)$.*

Beweis. Zu (a): Q sei ein singulärer Bildpunkt 2. Art von $A_k(U)$. Ein Exponent 2. Art von Q sei e.

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda e} t^e + a_{\lambda e+1} t^{e+1} + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

sei eine Q erzeugende Kurve. Dann wird Q auch durch das System von Polynomen

$$x_\lambda^* = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda e} t^e + b_{\lambda e+1} t^{e+1} + \cdots + b_{\lambda N} t^N \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

bei beliebigem N und beliebigen $b_{\lambda\nu}$ erzeugt. Wir wählen die Unbestimmten so, daß keine Funktion $p_j(x^*(t)), q_j(x^*(t))$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ identisch verschwindet. Q ist also doch von 1. Art im Widerspruch zu der Annahme.

(b) folgt aus (a) und Satz 12.

§ 9. Singuläre Bildpunkte einer meromorphen Abbildung im projektiven Raum.

9.1. Als Bildraum werde der projektive $(z)_k$-Raum genommen. Die meromorphe Abbildung B_k habe die Gleichungen

$$z_j = \varrho f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k+1). \tag{1}$$

Als Unbestimmtheitspunkt von B_k wird ein Punkt (x^0) bezeichnet, in dem alle Funktionen f_j verschwinden.

Δ sei eine analytische Mannigfaltigkeit im $(x)_n$-Raum. Auf keiner der im Punkte O irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten von Δ sollen alle Funktionen f_j identisch Null sein. Dann werde die meromorphe Abbildung B_k auf Δ untersucht. Die Definition des singulären Bildpunktes von $B_k(\Delta)$ geschieht wie in Definition II. Die Sätze 1 und 2 in § 2 gelten ungeändert. Im Beweise von Satz 2 tritt an die Stelle des Gleichungssystems (2) das folgende:

$$\begin{cases} \varphi_\nu(x)_n = 0 & (\nu = 1, 2, \ldots, N;\ \text{vgl. Nr. 1.1}) \\ f_i(x)_n z_j - f_j(x)_n z_i = 0 & (i, j = 1, 2, \ldots, k+1). \end{cases} \tag{2}$$

Im Anschluß an die Sätze 1 und 2 läßt sich im vorliegenden Fall des projektiven $(z)_k$-Raumes ein besonders einfacher Beweis des Satzes 9 gewinnen. Die Menge der singulären Bildpunkte ist nämlich eine kompakte „analytische Menge" im projektiven Raum im Sinne der Definition von H. Kneser (vgl. [8], S. 382). Hieraus folgt nach einem Satze von Chow, für den Kneser in der zitierten Arbeit einen vereinfachten Beweis angibt, unmittelbar Satz 9.

9.2. Ein singulärer Bildpunkt heiße von 1. Art, wenn es eine Q erzeugende analytische Kurve gibt, auf der keine Funktion f_j identisch verschwindet, andernfalls von 2. Art. Die Definition der formalen singulären Bildpunkte 1. Art (Definition V, Nr. 4.1) ist in der folgenden Weise abzuändern:

$\Gamma(r)$ sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ. Setzen wir die Entwicklungen von $\Gamma(r)$ in die Funktionen $f_j(x)_n$ $(j=1,\ldots,k+1)$ ein, so entstehe

$$(3) \qquad f_j = t^{\gamma_j}(c_{j0} + c_{j1}t + \cdots), \quad c_{j0} \neq 0 \quad (j = 1, \ldots, k+1).$$

Die größte der Zahlen γ_j sei γ, und es sei $\gamma \leq r$. Die kleinste Zahl γ_j werde mit δ bezeichnet.

(a) Wenn $\gamma_j > \delta$ ist, werde $\zeta_j = 0$ gesetzt.

(b) Wenn $\gamma_j = \delta$ ist, werde $\zeta_j = c_{j0}$ gesetzt.

Dann heiße der Punkt mit den Koordinaten ζ_j $(j=1,\ldots,k-1)$ formaler singulärer Bildpunkt. Die Zahl γ werde Exponent von (ζ) genannt. Die Sätze des § 8 sind auch im vorliegenden Fall richtig. Die Formulierung des Hauptsatzes ist so abzuändern, daß die soeben angegebene Definition des formalen singulären Bildpunktes im projektiven Raum berücksichtigt wird.

Literatur.

[1] AUTONNE: Sur les poles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes. Acta math., Stockh. **21**, 249—264 (1897). — [2] BLUMENTHAL: Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. 2. Teil. Math. Ann. **58**, 497—527 (1904). [3] OSGOOD: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II, 1. Teil, 1929; 2. Teil, 1932. Berlin u. Leipzig. — [4] ALEXANDROFF-HOPF: Topologie, Bd. 1. Berlin 1935. — [5] WAERDEN, VAN DER: Moderne Algebra, Bd. II. Berlin 1931. — [6] WAERDEN, VAN DER: Einführung in die algebraische Geometrie. Berlin 1939. — [7] GRÖBNER: Moderne algebraische Geometrie. Wien u. Innsbruck 1949. — [8] KNESER, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. **4**, 382—391 (1951). — [9] THIMM: Über algebraische Relationen zwischen meromorphen Funktionen in abgeschlossenen Räumen. Diss. Königsberg 1939.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 4. August 1952.)

PRASAD, B. N., and U. N. SINGH
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 481—482 (1953)

Corrigenda and Addenda.

On the strong summability of the derived Fourier series and its conjugate series. Math. Zeitschr. vol. 56, pp. 280—288.

By

B. N. PRASAD and U. N. SINGH.

1. On page 283, line 9: Add $o(1)$ on the right hand side of the inequality and in line 13 add $o(n)$.

2. On page 283 formula (3.4): Read

$$P = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\cot\tfrac{1}{2}t\,\lambda_n(t)\,dg(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}(P_1 + P_2 + P_3),$$

where δ is positive and small.

On page 284: In the evaluation of P_2 take δ as the upper limit of the integral instead of π. As integration by parts shows, under the hypothesis of the theorem the integral $\int_{1/n}^{\delta}\cot\tfrac{1}{2}t\,|dg(t)|$ exists for small δ and large n. Hence $|P_2/n|$ can be made arbitrarily small by first choosing δ sufficiently small and then choosing n sufficiently large.

Finally, $P_3 = o(n)$ for a fixed δ. This is proved by applying the lemma of page 282 after making

$$\int_{\delta}^{\pi}\cot\tfrac{1}{2}t\,\lambda_n(t)\,dg(t) = \int_0^{\pi}\lambda_n(t)\,d\beta(t),$$

where $\beta(t)$ is an even and continuous function of bounded variation which vanishes for $0 \leq t \leq \delta$.

Corresponding modifications should be made in the analysis at the bottom of page 284 and the top of page 285.

3. On page 285, in formula (4.1): $-$ should be replaced by $+$.

4. Corrections corresponding to 2 should be made in the analysis of § 5.

In formula (5.3) the integral denoted by I should be broken up into two parts: $\int_{1/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} = I + I_1$, where δ is small. The estimates of I and I_1 will proceed as those of P_2 and P_3 respectively.

5. The example considered by SINGH and referred to in § 2 is the series $\sum_{1}^{\infty} \cos n x$ which corresponds to the periodic function (with period 2π)

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\pi - x) \quad \text{for} \quad 0 < x < 2\pi, \quad f(0) = 0.$$

University of Allahabad (India).

(Eingegangen am 11. Februar 1953.)

Grundversuche der Physik in historischer Darstellung

Von Professor Dr. **Carl Ramsauer**, Berlin. In zwei Bänden.

Erster Band: **Von den Fallgesetzen bis zu den elektrischen Wellen.**
Mit 129 Abbildungen. VIII, 189 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 19.80

Inhaltsverzeichnis: Die Fallgesetze (GALILEI). — Das Gravitationsgesetz (BRAHE, KEPLER, NEWTON). — Druck und Gewicht der Luft (TORRICELLI, GUERICKE). — Mittlere Erddichte (Gravitationskonstante) (CAVENDISH). — Der FOUCAULTsche Pendelversuch (FOUCAULT). — Die Gasgesetze (BOYLE, MARIOTTE, GAY-LUSSAC, RUDBERG, REGNAULT). — Wärme und Arbeit (RUMFORD, R. MAYER, JOULE). — Die kritische Temperatur (ANDREWS). — Die experimentellen Beweise der kinetischen Gastheorie (BROWN, O. E. MEYER, MAXWELL, STERN). — Die Lichtgeschwindigkeit (RÖMER, FIZEAU, FOUCAULT). — Die Zerlegung des weißen Lichtes (NEWTON). — Die Interferenz des Lichtes (FRESNEL). — Die Polarisation des Lichtes (MALUS). — Das KIRCHHOFFsche Strahlungsgesetz; die Spektralanalyse (FRAUNHOFER, KIRCHHOFF, BUNSEN). — Der Lichtdruck (LEBEDEW). — Das COULOMBsche Gesetz (COULOMB). — Die VOLTAsche Säule (VOLTA). — Die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes (OERSTED, AMPÈRE). — Das OHMsche Gesetz (OHM). — Das JOULEsche Gesetz (JOULE). — Die Gesetze der Elektrolyse (FARADAY, HITTORF, KOHLRAUSCH, VAN'T HOFF). — Induktion und Selbstinduktion (FARADAY). — Das absolute Maßsystem (GAUSS, WEBER). — Die magnetische Wirkung bewegter Ladungen (ROWLAND). — Der Diamagnetismus (FARADAY). — Die elektrischen Schwingungen (FEDDERSEN). — Die elektrischen Wellen (HERTZ). — Quellennachweise zu den einzelnen Artikeln. — Literatur zur Geschichte der Physik. — Zeitliche Übersicht der Entdecker und Entdeckungen. — Alte Maße und Gewichte. — Namenverzeichnis.

Dieses Buch verfolgt ein wesentlich anderes Ziel als die bisher auf diesem Gebiet erschienenen Werke. Nach Ansicht des Verfassers sollte eine Geschichte der Physik als einer ausgesprochenen Erfahrungswissenschaft in *erster* Linie das stufenweise Wachsen des physikalischen Erfahrungsgutes durch die im Laufe der Zeit hinzutretenden neuen Erfahrungen behandeln, d. h. eine Geschichte der Physik sollte in erster Linie eine Geschichte der physikalischen Experimente sein.

Bei der ungeheuren Größe des Materials ist dabei eine Beschränkung auf die *„Grundversuche"* geboten, d. h. auf diejenigen Versuche, welche — in der Form reifer Leistungen — ein neues Gebiet eröffnet, eine prinzipielle Frage entschieden oder zu einem allgemeinen Gesetz geführt haben; kurz, es handelt sich um solche Versuche, denen ein Fortschritt von offensichtlich *grundlegender* Bedeutung zu verdanken ist. Diese historische Darstellung der Grundversuche beansprucht durchaus nicht, eine Geschichte der Physik zu sein. Sie will die allgemeinen und speziellen Geschichtswerke nicht ersetzen, sondern nur in einer Richtung ergänzen, welche bisher stark vernachlässigt worden ist. Diese Vernachlässigung offenbart sich schon äußerlich darin, daß in bekannten, sonst vortrefflichen Werken die bildliche Wiedergabe von Versuchsanordnungen völlig fehlt.

Der Verfasser ist kein Historiker von Fach, sondern Experimentalphysiker. Er glaubt aber, daß für die hier vorliegende Aufgabe, d. h. für das Verstehen und Darstellen der alten Versuche, die eigene experimentelle Erfahrung wichtiger ist als eine spezielle historische Vorbildung.

Der Verfasser würde es besonders begrüßen, wenn sein Werk auch dazu beitrüge, den Lehrern und den Schülern der höheren Schulen die historischen Grundlagen der Experimentalphysik näherzubringen.

Zweiter Band: **Von den Röntgenstrahlen bis zu den Materiewellen.**
In Vorbereitung.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Herausgegeben von **S. Flügge**, Marburg und **F. Trendelenburg**, Erlangen, unter Mitwirkung von W. Bothe, Heidelberg, F. Hund, Frankfurt a. M., P. Harteck, Hamburg.

Vor kurzem erschien:

Sechsundzwanzigster Band

Mit 110 Abbildungen. III, 439 Seiten. 1952. DM 66.—; Ganzleinen DM 69.—

Inhaltsübersicht: **Elektromagnetische Wellenleiter.** Von Dr. R. Honerjäger, Frankfurt. — **Thermodynamisch-phänomenologische Theorie der irreversiblen Prozesse.** Von Dr. R. Haase, Marburg a. d. Lahn. — **Das Zwei-Nucleonen-Problem.** Von Professor Dr. S. Flügge, Marburg a. d. Lahn. — **Das Schalenmodell des Atomkerns.** Von Professor Dr. O. Haxel, Dr. J. H. D. Jensen und Dr. H. E. Suess, Heidelberg. — **Feldmechanik des Elektrons und der Elementarteilchen.** Von Professor Dr. H. Hönl, Freiburg. — **Die Theorie des Kristallwachstums.** Von Dr. O. Knacke und Professor Dr. I. N. Stranski, Berlin. — **Inhalt der Bände XI—XXVI. — Namen- und Sachverzeichnis.**

Früher erschienen:

Fünfundzwanzigster Band

Mit 345 Abbildungen und 32 Energieschemata, VII, 650 Seiten. 1951. DM 76.—; Ganzleinen DM 79.—

Inhaltsübersicht: **Hydrodynamisches Verhalten von Makromolekülen in Lösung.** Von Professor Dr. W. Kuhn, Professor Dr. H. Kuhn, Dr. P. Buchner, Basel. — **Schallgeschwindigkeit und Molekülstruktur in Flüssigkeiten.** Von Privatdozent Dr. W. Schaaffs, Berlin-Siemensstadt. — **Fehlordnungserscheinungen und Leitungsvorgänge in ionen- und elektronenleitenden festen Stoffen.** Von Professor Dr. K. Hauffe, Greifswald. — **Der elektrische Lichtbogen.** Von Privatdozent Dr. H. Maecker, Kiel. — **Dielektrisches Verhalten im Zusammenhang mit dem polaren Aufbau der Materie.** Von Professor Dr. F. H. Müller, Marburg a. d. Lahn und Privatdozent Dr. Chr. Schmelzer, Heidelberg. — **Theorie der elastischen Streuung von Korpuskeln an zusammengesetzten Atomkernen.** Von Professor Dr. S. Flügge, Marburg a. d. Lahn. — **Die Energieschemata der leichten Atomkerne.** Von Dr. U. Cappeller, Marburg a. d. Lahn. — **Inhalt der Bände XI—XXV. Namen- und Sachverzeichnis.**

Vierundzwanzigster Band

Mit 232 Abbildungen. III, 451 Seiten. 1951. DM 48.60

Inhaltsübersicht: **Spezifische Leuchtvorgänge im Bereich der mittleren Ionosphäre.** Von Professor Dr. C. Hoffmeister, Sonneberg. — **Elektroneninterferenzen und ihre Anwendung.** Von Professor Dr. H. Raether, Hamburg. — **Die Erforschung der Struktur hochmolekularer und kolloider Stoffe mittels Kleinwinkelstreuung.** Von Dr. R. Hosemann, Berlin. — **Experimentelle Grundlagen der Spektroskopie des Zentimeter- und Millimeter-Gebietes.** Von Dr. B. Koch, Weil a. Rhein. — **Die Mikrowellenspektren molekularer Gase und ihre Auswertung.** Von Dozent Dr. W. Maier, Freiburg i. Br. — **Spektroskopie der Gammastrahlen mit Kristallgittern.** Von Professor Dr. A. Faessler, Freiburg i. Br. — **Die genäherte Berechnung von Eigenwerten elastischer Schwingungen anisotroper Körper.** Von Dr. Hans J. Mähly, Zürich. — **Inhalt der Bände XI—XXIV. — Namen- und Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen zwei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.